

文章编号: 0253 - 9993(2003)01 - 0026 - 05

# 正交各向异性损伤材料的 Mohr - Coulomb 条件

沈新普<sup>1</sup>, 王建学<sup>2</sup>, Zenon. Mroz<sup>3</sup>

(1. 沈阳工业大学 建筑学院, 辽宁 沈阳 110023; 2. 河北建筑科技学院, 河北 邯郸 056038; 3. IFTR, Polish Academy of Sciences, Warsaw 00 - 049, Poland)

**摘 要:** 提出了正交异性损伤修正的 Mohr - Coulomb 条件. 从对含裂纹单元的细观分析入手, 通过均匀化 (Homogenization) 处理, 将损伤张量引入到 Mohr - Coulomb 条件中, 推导出相应的计算公式. 采用的损伤模型考虑了裂纹的闭合效应. 得出了新条件在二维层状岩石体中的简单应用, 按本文提出的损伤材料的 Mohr - Coulomb 条件, 计算得到了层状节理岩体侧压力 - 剪切强度曲线, 结果的非线性特性与文献中的试验结果吻合. 说明传统的侧压力与剪切强度的关系 (试验中所获得的剪切强度值只是与过程有关的参数  $c^*$ , 而不是材料参数  $c'$ ).

**关键词:** 正交异性; 损伤; Mohr - Coulomb 条件; 均匀化; 层状岩石体  
**中图分类号:** TU459      **文献标识码:** A

对于岩石来说, 塑性的含义主要是指内部裂纹或节理面间的摩擦滑动; 损伤是指内部裂纹的发生及扩展. 在几何上, 损伤意味着净承载面积的减少. 采用塑性损伤耦合本构模型能够比较确切地表述岩石体的力学行为. 塑性损伤耦合至少有两个含义: 两者通过它们的势函数 (及加载函数) 相互影响; 两者通过它们的一致性条件相互影响. 即塑性与损伤两个内变量的演化相互影响. 本文讨论损伤对塑性屈服函数的影响, 将损伤张量引入到 Mohr - Coulomb 条件表达式中, 建立损伤材料的 Mohr - Coulomb 临界条件.

作为岩土塑性屈服函数的典型形式, Mohr - Coulomb 条件在岩土结构的数值分析中占有重要地位. Mohr - Coulomb 条件表述了岩土结构的承载能力不仅与材料参数有关, 而且与临界面上剪应力和正应力的组合有关, 而并非像金属的塑性那样仅取决于主应力的组合. 以往, 通过有效应力的概念可以将损伤引入塑性数值计算<sup>[1~4]</sup>, 但这一途径不能确切表述岩石裂纹闭合时裂纹对剪切性能的影响. 一方面, 岩石剪切试验结果表明: 侧压力与剪切强度的关系呈一定程度的非线性, 与 Mohr - Coulomb 条件不相符<sup>[5]</sup>, 为此, 若干学者提出了不同的方法来处理这一问题<sup>[6,7]</sup>; 另一方面, 基于试验结果, 岩石工程师们提出了各种形式经验型的非线性的 Mohr - Coulomb 型的临界条件<sup>[8,9]</sup>. 本文从含裂纹单元的细观分析入手, 通过均匀化 (Homogenization) 处理, 将损伤引入到 Mohr - Coulomb 条件中.

## 1 正交异性损伤模型

采用损伤模型为二阶张量形式<sup>[10]</sup>. 对于  $N$  维问题, 二阶损伤张量  $D$  的定义为

$$D = \sum_{i=1}^N n_i \otimes n_i, \quad (1)$$

式中,  $n_i$  为主方向,  $i$  为损伤主值.

为了使模型能够反映裂纹闭合时的特性, 采用了活跃损伤张量  $D$  的概念<sup>[10]</sup>. 在外载作用下, 闭合的裂纹所对应的损伤为不活跃损伤, 张开的裂纹所对应的损伤为活跃损伤. 活跃损伤张量的计算式<sup>[10]</sup>为

收稿日期: 2002 - 06 - 05

基金项目: 教育部留学归国人员科研启动基金资助项目 (1999 363)

$$D = P^+ ( ) D, \tag{2}$$

$$P_{ijkl} = Q_{ik}^+ Q_{jl}^+, \quad Q^+ = \prod_{i=1}^3 h(\epsilon_i) p_i \otimes p_i, \quad \epsilon^+ = \prod_{i=1}^3 \epsilon_i \otimes p_i,$$

式中,  $P^+$  为映射张量;  $Q^+$  为正定谱分解张量;  $h(\epsilon_i)$  为 Heaviside 函数;  $p_i$  为应变张量  $\epsilon$  的第  $i$  个主方向矢量;  $\epsilon_i$  为应变张量  $\epsilon$  的第  $i$  个主值.

不活跃损伤不影响裂纹法线方向的弹性模量, 但对沿裂纹面切线方向的剪切强度有影响.

## 2 损伤材料的 Mohr - Coulomb 条件

均匀化 (Homogenization)<sup>[10]</sup>是除了细观力学之外, 建立宏细观之间等效关系的有效途径. 笔者引入临界面上正应力分布的假设, 建立宏观等效的损伤材料的 Mohr - Coulomb 条件.

给定双向应力作用下的含裂纹单元如图 1 所示. 在压应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的作用下, 将沿临界面  $AF$  方向产生按 Mohr - Coulomb 准则的屈服. 不失一般性, 设剪切屈服面  $AF$  上含有两条裂纹, 其中一条为张开裂纹, 对应活跃损伤, 用  $\Omega_n^{ad}$  表示; 另一条为闭合裂纹, 对应不活跃损伤, 用  $\Omega_n^{id}$  表示. 图中  $n$  为临界面的法向矢量;  $t$  为临界面的切向矢量.

二维平面中与主应力方向成  $\theta$  角的平面 (线) (图 2) 上的宏观正应力及剪应力为

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \cos 2\theta, \quad \tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta. \tag{3}$$

沿剪切屈服面  $AF$  的 Mohr - Coulomb 条件为  $\tau_n = c + \mu \sigma_n$ . 在数值计算时常用另一种形式, 即  $F = \tau_n - c - \mu \sigma_n = 0$ . 设作用在张开裂纹面上的细观应力分量为 0, 作用在闭合裂纹面上的细观正应力分量与无损材料部分的细观正应力分量相同, 则

$$\tau_n^{ad} = 0, \quad \tau_n^{id} = \tau_n = \sigma_n (1 - \mu_n^{ad})^{-1}. \tag{4}$$

在细观上, 对于剪切屈服面  $AF$  的无损材料部分 ( $AB, CD, EF$ ), 其局部的 Mohr - Coulomb 条件为

$$F_t^P = \tau_n^t - \mu_t \sigma_n^t - c^t = 0. \tag{5}$$

角标  $t$  为无损材料部分对应的变量. 对于剪切屈服面  $AF$  的不活跃损伤部分  $DE$  段, 即闭合裂纹部分, 其局部的 Mohr - Coulomb 准则为

$$F_{id}^P = \tau_n^{id} - \mu_{id} \sigma_n^{id} - c^{id}, \tag{6}$$

式中,  $\mu^{id}$  和  $c^{id}$  分别为裂纹闭合时裂纹面上的粗糙度产生的抗剪强度和摩擦因数. 对于剪切屈服面  $AF$  的活跃损伤材料部分  $BC$  段, 即张开裂纹部分, 其局部的抗剪能力为零.

根据均匀化原理, 宏观应力是细观应力的均匀化体现. 在剪切屈服面  $AF$  上, 由沿  $AF$  方向的力的平衡关系可得宏观应力  $\sigma_n$  和  $\tau_n$  与细观局部应力之间的等效关系为

$$\sigma_n = \tau_n (1 - \mu_n^{ad} - \mu_n^{id}) + \mu_n^{id} \sigma_n^{id}, \quad \tau_n = \tau_n (1 - \mu_n^{ad} - \mu_n^{id}) + \mu_n^{id} \tau_n^{id}, \tag{7}$$

式中,  $\mu_n^{ad}$ ,  $\mu_n^{id}$  分别为临界面上的活跃损伤分量和不活跃损伤分量,  $\mu_n^{ad} = D_{ij} n_i n_j$ ,  $\mu_n^{id} = (D_{ij} - D_{ij}^0) n_i n_j$ .

将式 (7) 代入各自的 Mohr - Coulomb 条件表达式 (5), (6), 可得相应的剪应力  $\tau_n^t$ ,  $\tau_n^{id}$  的表达式, 然后代入式 (7), 则可得损伤材料均匀化的宏观 Mohr - Coulomb 条件. 其形式为

$$\tau_n = c^* + \mu^* \sigma_n, \tag{8}$$

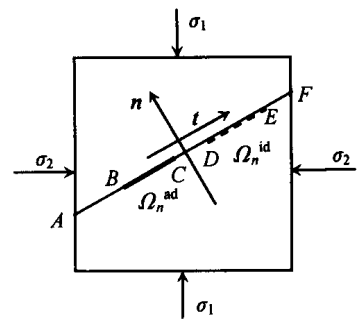


图 1 含有裂纹的单元体的摩擦滑动临界面  
Fig. 1 The sliding critical plane of a representative element with micro - racks

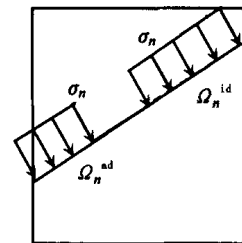


图 2 摩擦滑动临界面上的正应力分布  
Fig. 2 The stress distribution over the sliding critical plane

式中,  $\sigma_n, \tau_n$  为宏观应力; 系数  $\mu^*$  为考虑损伤均匀化后的等效值, 其表达式为

$$\mu^* = (1 - \frac{\tau_n^{ad}}{\sigma_n}) [\mu^t (1 - \frac{\tau_n^{id}}{\sigma_n}) + \mu^{id} \frac{\tau_n^{id}}{\sigma_n}], \tag{9}$$

$$c^* = c^t (1 - \frac{\tau_n^{ad}}{\sigma_n} - \frac{\tau_n^{id}}{\sigma_n}) + c^{id} \frac{\tau_n^{id}}{\sigma_n}. \tag{10}$$

由式 (8) ~ (10) 可知, 在侧压力与剪切强度的关系试验中所获得的剪切强度值只是式 (10) 表示的  $c^*$ , 并不是  $c^t$ .

由于正交异性损伤的影响, 耦合后的塑性也是正交异性的, 从而对于  $N$  维问题, 必须在计算中使用 Mohr - Coulomb 准则检验  $N$  个正交异性主轴方向上的应力加载状态计算塑性流动. 设第  $i$  个摩擦滑动临界面的主方向矢量为  $v_i$  ( $i=1, N$ ), 这里  $N$  为摩擦滑动临界面的总数. 这样式 (8) 可以改写为

$$\tau_{ni} = c_i^* + \mu_i^* \sigma_{ni}, \tag{11}$$

式中,  $i$  为上述张量在第  $i$  个临界面上的分量值.

主应力形式的 Mohr - Coulomb 准则为

$$F(\sigma_1, \sigma_3, \mu^*, c^*) = \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right]^2 \sin^2 2\theta - \mu^* \left[ \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right] + \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] \cos 2\theta \right] - c^* = 0. \tag{12}$$

由于复杂加载状态下主应力方向与主损伤方向一般不重合, 故有

$$\begin{cases} \sigma_n^{ad} = D_{11} \sin^2 \theta + D_{22} \cos^2 \theta + D_{12} \sin 2\theta, \\ \sigma_n = D_{11} \sin^2 \theta + D_{22} \cos^2 \theta + D_{12} \sin 2\theta, \\ \tau_n^{id} = \tau_n - \tau_n^{ad}. \end{cases} \tag{13}$$

对于给定的应力  $\sigma$  和损伤  $D$ , 式 (12) 取极值的条件为  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$ , 即

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta + \mu^* (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta - \frac{\partial \mu^*}{\partial \theta} \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \right] - \frac{\partial c^*}{\partial \theta} = 0, \tag{14}$$

式中,  $\frac{\partial \mu^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_n^{ad}}{\partial \theta} \left[ \frac{\tau_n^{id}}{\sigma_n} (\mu^{id} - \mu^t) \right] + \frac{\partial \tau_n^{id}}{\partial \theta} (\mu^{id} - \mu^t + \mu^t \frac{\tau_n^{ad}}{\sigma_n})$ ;  $\frac{\partial c^*}{\partial \theta} = c^{id} \frac{\partial \tau_n^{id}}{\partial \theta} - c^t \left( \frac{\partial \tau_n^{id}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_n^{ad}}{\partial \theta} \right)$ ;  $\frac{\partial \tau_n^{id}}{\partial \theta} = (D_{11} - D_{22} - D_{11} + D_{22}) \sin 2\theta + 2(D_{12} - D_{12}) \cos 2\theta$ ;  $\frac{\partial \tau_n^{ad}}{\partial \theta} = (D_{11} - D_{22}) \sin 2\theta + 2D_{12} \cos 2\theta$ ;  $\frac{\partial \tau_n}{\partial \theta} = (D_{11} - D_{22}) \sin 2\theta + 2D_{12} \cos 2\theta$ .

一方面由给定的  $\sigma$  和  $D$  即可求出相应的临界滑动面  $AF$  方向的角  $\theta$ ; 另一方面当用于含界面的结构, 如层状岩体和砌体结构等的破坏 (塑性) 分析时 (此时的破坏一般沿界面层发生, 故方向角  $\theta$  为已知), 可按式 (8) ~ (10) 求得层面上的 Mohr - Coulomb 条件.

### 3 层状岩体 $\sigma_n - \tau_n$ 曲线的简单应用

由岩石的剪切试验结果表明, 侧压力与剪切强度的关系呈一定程度的非线性<sup>[5]</sup>. 这一现象表明, Mohr - Coulomb 条件作为结构的屈服条件使用时会产生误差<sup>[8,11]</sup>. 笔者认为, 试验结果的非线性来源于加载过程中临界面  $AF$  法向损伤分量随载荷组合方式的变化而产生的非线性变化. 下面利用节理岩体的 Mohr - Coulomb 条件 (式 (9)) 加以说明.

层状节理岩体如图 3 所示. 给定岩石的节理为贯通节理, 损伤主值 (即分离因子) 为  $\lambda = 1$ , 节理面的倾角  $\beta = 45^\circ$ , 滑动摩擦因数  $\mu^{id} = \tan 40^\circ$ , 式 (8) ~ (13) 中的其它参数为

$$\frac{\tau_n^{ad}}{\sigma_n} + \frac{\tau_n^{id}}{\sigma_n} = 1, c^* = c^{id} \frac{\tau_n^{id}}{\sigma_n}, \mu^* = \mu^{id} \left( \frac{\tau_n^{id}}{\sigma_n} \right)^2.$$

节理面上的损伤张量如图 4 所示. 对应如图 3 所示的主应力,

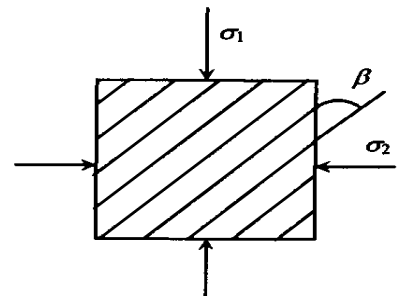


图 3 节理倾角为  $\beta$  的层岩

Fig. 3 Stratified rock with joint of angle  $\beta$

活跃损伤张量  $D$  将在  $\beta$  角范围内变化.

设定剪切滑动沿节理进行, 给出不同的围压  $\sigma_2$ , 由式 (9) ~ (11) 可得相应的沿节理发生滑动时的临界  $\tau_1$  值. 结合式 (3) 所得的  $\tau_n - \sigma_n$  曲线如图 5 所示, 曲线呈较强的非线性, 与文献 [5, 8] 的试验现象吻合.

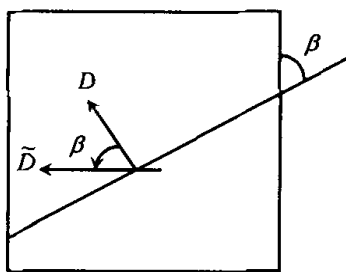


图 4 摩擦滑动临界面上  $D$  和  $\tilde{D}$

Fig. 4  $D$  and  $\tilde{D}$  on the sliding critical plane

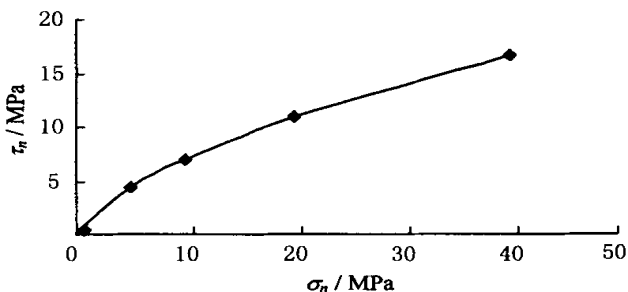


图 5 采用本文理论获得的  $\tau_n - \sigma_n$  结果

Fig. 5 The  $\tau_n - \sigma_n$  results obtained with the model presented here

## 4 结 论

(1) 从对含裂纹单元的细观分析入手, 通过均匀化 (Homogenization) 处理, 将损伤引入到 Mohr - Coulomb 条件中, 给出了均匀化了的 Mohr - Coulomb 准则. 模型既考虑了剪切强度劣化, 又可反映摩擦因数降低, 与已有的基于经验或试验拟合的 Mohr - Coulomb 型的临界条件相比, 此方法有明确的物理背景和严格的理论体系, 有明显的优越之处.

(2) 研究表明, 在传统的侧压力与剪切强度的关系试验中所获得的剪切强度值只是式 (10) 表示的  $c^*$ , 并不是  $c'$ . 真正的材料常数  $c'$  需要数值计算和试件加载试验才能求得. 按本文提出的损伤材料的 Mohr - Coulomb 条件, 计算所得层状节理岩体侧压力 - 剪切强度曲线与文献 [8, 10] 的试验现象一致, 表明本研究能恰当地表述和计算岩石剪切强度试验结果的非线性行为.

(2) 由于活跃损伤的引入使得 Mohr - Coulomb 条件必须结合数值计算才能使用, 这是本模型应用时的弱点, 但当模型用于数值计算时则是方便和实用的.

### 参考文献:

- [1] Lemaitre J. A course on damage mechanics, 2nd ed. [M]. Berlin: Springer, 1990.
- [2] Hansen N R, Schreyer H L. A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage [J]. Int. J. Solids Structures, 1994, 31 (2): 359 ~ 389.
- [3] Hayakawa K, Murakami S. Thermodynamic modeling of elastic - plastic damage and experimental validation of damage potential [J]. Int. J. Dama Mech, 1997, 6 (2): 333 ~ 363.
- [4] Mariotti de Sciarra F. A new variational theory and a computational algorithm for coupled elastoplastic damage models [J]. Int. J. Solids Structures, 1997, 34 (9): 1 761 ~ 1 796.
- [5] Vutukuri V S, Lama R D, Saluja S S. Handbook on mechanical properties of rocks, Vol. 1 [A]. Berlin: Trans Tech Publisher, 1974.
- [6] Basista M, Gross D. The sliding crack model of brittle deformation: an internal variable approach [J]. Int. J. Solids Structures, 1998, 35 (3): 487 ~ 509.
- [7] Dragon A, Halm D. A mesocrack damage and friction coupled model for brittle materials [A]. In: Damage Mechanics in Engineering Materials [C]. Voyiadjis G Z, Ju J W, Chaboche J L, Editors. Amsterdam: Elsevier Science, 1998. 321 ~ 336.

- [8] Duveau G, Shao J F. A modified single plane of weakness theory for the failure of highly stratified rocks [J]. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 1998, 35 (6): 807 ~ 813.
- [9] Hoek E, Brown E T. Practical estimation of rock mass strength [J]. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 1997, 34 (8): 1 165 ~ 1 186.
- [10] Swoboda G, Shen X P, Rosas L. Damage model for jointed rock mass and its application to tunneling [J]. *Computer and Geotechnics*, 1998, 22 (3/4): 183 ~ 203.
- [11] Muller D, Kratochvil J, Berveiller M. Nonlocal versus local elastoplastic behavior of heterogeneous materials [J]. *Int. J. Plasticity*, 1993, 9 (3): 633 ~ 645.
- [12] Basista M, Gross D. The sliding crack model of brittle deformation: an internal variable approach [J]. *Int. J. Solids Structures*, 1998, 35 (3): 487 ~ 509.

### 作者简介:

沈新普 (1963 - ), 男, 河北清河县人, 博士, 教授, 1993 年 9 月毕业于清华大学工程力学系, 现任沈阳工业大学计算力学研究所所长, 主要从事固体力学的研究工作, 发表论文 40 余篇.

## Mohr- Coulomb criteria associated with materials of orthotropic damage

SHEN Xinpu<sup>1</sup>, WANG Jianxue<sup>2</sup>, Zenon Mroz<sup>3</sup>

(1. College of Architecture, Shenyang Polytechnic University, Shenyang 110023, China; 2. Hebei Institute of Architectural Science and Technology, Handan 056038, China; 3. IFTR, Polish Academy of Science, Warsaw, 00-049, Poland)

**Abstract:** Mohr- Coulomb criterion associated with materials of orthotropic damage is presented in this paper. Second order damage tensor is adopted and the effect of crack- closure is taken into account. Based on the micro mechanical analysis of representative element consisting of cracks, the orthotropic damage tensor is introduced into the Mohr- Coulomb criterion through homogenization. Both the degradation of shear strength and degradation of friction angle caused by damage are included in this model. With the theory established in this paper, the nonlinear diagram of pressure vs shear strength is obtained, and then it is indicated that the shear strength reported in references is only  $c^*$ , a value occurred in the loading process, but not  $c^f$ , the expected material parameter.

**Key words:** orthotropy; damage; Mohr- Coulomb criteria; homogenization; stratified rock