

文章编号:1000-0887(2001)09-0927-07

# 岩土材料弹塑性正交异性损伤耦合本构理论\*

沈新普<sup>1</sup>, 泽农 慕容子<sup>2</sup>, 徐秉业<sup>3</sup>

(1. 沈阳工业大学 建筑工程系,沈阳 110023; 2. 波兰科学院 基础技术所,波兰华沙;  
3. 清华大学 工程力学系,北京 100084)

(杨桂通推荐)

**摘要:** 在不可逆热力学框架内建立了岩土材料的正交异性损伤塑性耦合宏观唯象本构理论. 主要结果有:1) 给出了耦合的塑性和损伤的演化律;2) 从对含裂纹单元的细观分析入手,通过均匀化(Homogenization)处理,将损伤引入到 Mohr-Coulomb 条件中. 模型同时考虑了损伤对剪切强度及摩擦角的影响,扩容现象则通过损伤应变来计算.

**关键词:** 损伤; 塑性; 耦合; 扩容; 岩土材料  
**中图分类号:** O342 **文献标识码:** A

## 引 言

对于岩土材料如岩石及混凝土来说,微裂纹面上的摩擦滑动通常用 Mohr-Coulomb 型的塑性来描述;内部裂纹的发生及扩展则被称为损伤. 采用塑性损伤耦合本构模型能够比较确切地表述岩土材料的力学行为. 塑性损伤耦合至少有两个含义:一是指两者通过它们的势函数相互影响;二是指两者通过它们的一致性条件相互影响. 换句话说,塑性与损伤两个内变量的演化相互影响.

以往,通过有效应力的概念可以将损伤引入塑性计算<sup>[1],[2],[3],[4]</sup>. 但这一途径不能确切表述岩石裂纹闭合时裂纹对剪切性能的影响. 为了确切考虑岩土材料裂纹面上的摩擦滑动, Basista 和 Gross<sup>[5]</sup>及 Dragon 和 Halm<sup>[6]</sup>分别提出了基于内变量理论的滑动裂纹模型. 此外,单一流动面模型也被某些文献用来描述损伤塑性耦合问题<sup>[7],[8]</sup>.

岩石剪切试验结果表明侧压力与试件剪切强度的关系呈一定程度的非线性,与 Mohr-Coulomb 条件不相符. 为此,若干学者提出了不同的方法来处理这一问题<sup>[9]</sup>. 另一方面,基于实验结果,岩土工程师们提出了各种形式经验型的非线性的 Mohr-Coulomb 型的临界条件<sup>[10],[11]</sup>.

本文将提出基于热力学及微结构分析的正交异性塑性损伤耦合宏观唯象本构模型. 模型将同时考虑损伤对剪切强度及摩擦角的影响. 塑性和损伤的计算将在名义应力(而不是有效应力)空间中进行,并将从对含裂纹单元的细观分析入手,通过均匀化(Homogenization)处理,

\* 收稿日期: 2000-08-19; 修订日期: 2001-04-08  
基金项目: 国家教育部留学归国人员科研启动基金资助课题(1999 363)  
作者简介: 沈新普(1963—),男,河北清河人,教授,博士.

将损伤引入到 Mohr-Coulomb 条件中·本模型无需引入特殊参数来反映耦合·

## 1 模型的一般热力学描述

### 1.1 连续介质的热力学

首先简要回顾损伤塑性本构模型的热力学体系,并引入宏观变量表示的热力学势·考虑给定的单位质量的内能  $u = u[x, s(x), (x), i(x)]$ ,这里  $x$  和  $s$  分别表示应变和熵;  $i$  表示内变量的集合·从而 Clausius-Duhem 不等式可以写为如下形式:

$$\dot{s} - \dot{u}(s, x, i) - \dot{\vartheta} \leq 0, \quad (1)$$

式中  $\rho$  表示材料密度;  $\vartheta$  表示绝对温度;  $\dot{s}_i$  表示熵增量·符号上的“ $\dot{\cdot}$ ”表示增量(或率)·由式(1)可得如下不等式:

$$\left( -\frac{\partial u}{\partial s} \right) \dot{s} + \left( -\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) \dot{\vartheta} - \frac{\partial u}{\partial i} \dot{i} \leq 0. \quad (2)$$

对于可逆过程,有  $\dot{i} = 0$  及  $\dot{\vartheta} = 0$ ·从而对于任意的  $\dot{i}$  和  $\dot{s}$ ,都有下面的势共轭关系:

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad -\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta}. \quad (3)$$

耗散率为:

$$Y = -\frac{\partial u}{\partial i} \dot{i}. \quad (4)$$

对于本构模型研究,下面的一对热力学势较为常用,即应变自由能

$$\psi = u - \vartheta s = \psi(x, s, i), \quad (5)$$

和应力自由能

$$\phi = \psi - \vartheta s = \phi(x, s, i). \quad (6)$$

用应变自由能表达的 Clausius-Duhem 不等式可以写为如下形式:

$$Y = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \dot{s} - \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \dot{\vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial i} \dot{i} \leq 0 \quad (7)$$

用应力自由能表达的 Clausius-Duhem 不等式可以写为如下形式:

$$Y = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) \dot{\vartheta} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - s \right) \dot{s} + \frac{\partial \phi}{\partial i} \dot{i} \leq 0 \quad (8)$$

由式(7)及式(8)可得如下的本构关系:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial s} = s, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad Y_i = -\frac{\partial \psi}{\partial i} \quad (9)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = s, \quad s = \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, \quad Y_i = \frac{\partial \phi}{\partial i} \quad (10)$$

式中  $Y_i$  为内变量  $i$  的共轭力·

综合以上,增量(或率)形式的应力-应变关系可表达如下:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta \partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta \partial s} \dot{s} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta \partial i} \dot{i} \quad (11)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta \partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta \partial s} \dot{s} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta \partial i} \dot{i} \quad (12)$$

进一步引入等温过程假设  $\dot{\vartheta} = 0$ ,并引入塑性和损伤变量  $\dot{p} = \dot{P}$ ,  $\dot{D} = \dot{D}$ ,式(11)和式(12)可写为:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta \partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta \partial P} \dot{P} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta \partial D} \dot{D} = \dot{\sigma}^e + \dot{\sigma}^P + \dot{\sigma}^D, \quad (11a)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial P} : \dot{P} + \frac{\partial \sigma}{\partial D} : \dot{D} = \dot{\sigma}^e + \dot{\sigma}^p + \dot{\sigma}^d \quad (12a)$$

在式(11a)和式(12a)中总的应力率及应变率被分解为弹性、塑性和损伤共3部分,给定:

$$\begin{aligned} P &= P, \quad \dot{P} = W(\sigma, P, D) = \frac{1}{2}(\sigma - P) : E(D) : (\sigma - P), \\ &= u(\sigma, D) = \frac{1}{2} : L(D) : \sigma \end{aligned} \quad (13)$$

从而有:

$$Y_d = \frac{1}{2}(\sigma - P) : \frac{\partial E(D)}{\partial D} : (\sigma - P), \quad Y_p = \dot{P} = E(D) : (\sigma - P), \quad (14)$$

式中  $L(D) = E(D)^{-1}$  为弹性柔度张量,  $E$  是弹性刚度张量,耗散率为

$$Y = \dot{\sigma} : P + Y : \dot{D} \quad (15)$$

### 1.2 塑性流动准则及损伤准则

设受损伤影响的 Mohr-Coulomb 型的屈服条件为:

$$F^P = F^P(\sigma, D, c^0, \theta) = 0 \quad (16)$$

式中  $c^0, \theta$  分别是材料的初始抗剪强度和内摩擦角,  $\sigma$  为应力张量,  $D$  为损伤张量,用共轭力  $Y$  表示的损伤条件为:

$$F^D = F^D(Y, P, \theta) = 0, \quad (17)$$

塑性流动和损伤演化方程为:

$$\dot{P} = \dot{P} \frac{\partial F^P}{\partial \sigma}, \quad \dot{P} > 0, F^P = 0, \dot{P} F^P = 0, \quad (18)$$

$$\dot{D} = \dot{D} \frac{\partial F^D}{\partial Y}, \quad \dot{D} > 0, F^D = 0, \dot{D} F^D = 0. \quad (19)$$

在给定载荷下的加卸载状态条件为:

- 1) 弹性状态;  $F^P < 0; F^D < 0;$
- 2) 损伤加载,  $F^D = \dot{F}^D = 0, F^P < 0;$
- 3) 塑性加载,  $F^P = \dot{F}^P = 0, F^D < 0;$
- 4) 耦合加载,  $F^D = \dot{F}^D = 0, F^P = \dot{F}^P = 0.$

对于加载状态,使用一致性条件可以确定相应的塑性乘子  $\dot{P}$  及损伤乘子  $\dot{D}$ . 塑性一致性条件为:

$$\dot{F}^P = \frac{\partial F^P}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F^P}{\partial D} : \dot{D} = 0, \quad (20)$$

即:

$$\dot{P} \left[ \frac{\partial F^P}{\partial \sigma} : E : \frac{\partial F^P}{\partial \sigma} \right] + \dot{D} \left[ \frac{\partial F^P}{\partial \sigma} : \frac{\partial^2}{\partial D \partial \sigma} : \frac{\partial F^D}{\partial Y} + \frac{\partial F^P}{\partial D} : \frac{\partial F^D}{\partial Y} \right] + \frac{\partial F^P}{\partial \sigma} : E : \dot{\sigma} = 0. \quad (21)$$

类似地可以求得损伤一致性条件,为:

$$\dot{P} \left[ \frac{\partial F^D}{\partial Y} : \frac{\partial^2}{\partial D \partial \sigma} : \frac{\partial F^P}{\partial \sigma} \right] + \dot{D} \left[ \frac{\partial F^D}{\partial Y} : \frac{\partial^2}{\partial D^2} : \frac{\partial F^D}{\partial Y} \right] + \frac{\partial F^D}{\partial Y} : \frac{\partial^2}{\partial D \partial \sigma} : \dot{\sigma} = 0. \quad (22)$$

最后可得非线性应力应变增量本构方程:

$$\dot{\sigma} = E : \dot{\epsilon} - \dot{P} E : \frac{\partial F^P}{\partial \sigma} + \dot{D} \frac{\partial^2}{\partial D \partial \sigma} : \frac{\partial F^D}{\partial Y}. \quad (23)$$

式(23)右端最后一项代表损伤应变  $D$  对应力的影响.

### 1.3 关于损伤应变与扩容计算的讨论

在金属塑性理论中,非弹性的体积应变(即扩容)为0.但是对于岩土材料,非弹性的体积应变(即扩容)却是一个很普遍的行为特性.实际上,岩土材料的扩容源于裂纹的萌生及扩展.

根据 Rice 的内变量理论<sup>[13]</sup>,损伤张量  $D$  产生的非弹性的应变为:

$$d \frac{D}{ij} = \frac{\partial Y_{ij}}{\partial D_{kl}} d D_{kl}, \quad (24)$$

体积应变(即扩容)为:

$$d \frac{d}{v} = d \frac{d}{ii} = \text{tr}(d \frac{d}{ij}). \quad (25)$$

损伤应变不产生任何能量耗散,这是因为相关的能量耗散已经由损伤及其共轭力表示.应该说明,损伤应变也不同于塑性应变,塑性应变通常与晶格位错或摩擦滑动相联系.

由于在塑性计算中不计扩容,这样塑性势可取为与塑性屈服函数相同.

## 2 塑性损伤耦合描述

岩土材料的损伤可以用二阶损伤张量来描述.本节首先介绍已有的正交异性张量损伤模型,之后应用均匀化方法建立耦合的损伤塑性模型.

### 2.1 正交异性张量损伤模型

本文采用的损伤模型为二阶张量形式.二阶损伤张量  $D$  的定义为:

$$D = \sum_{i=1}^3 n_i \otimes n_i, \quad (26)$$

式中  $n_i$  表示主方向,  $i$  表示损伤主值.

为了使模型能够反映裂纹闭合时的特性,文中采用了活跃损伤张量  $\tilde{D}$  的概念<sup>[21],[14]</sup>:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= P^+ : D, P_{ijkl} = Q_{ik}^+ Q_{jl}^+, \\ Q^+ &= \sum_{i=1}^3 h(i) p_i \otimes p_i, \quad + = \sum_{i=1}^3 i p_i \otimes p_i, \end{aligned} \quad (27)$$

式中  $P^+$  是映射张量,  $Q^+$  是正定谱分解张量,  $h(i)$  是 Heaviside 函数,  $p_i$  是应变张量  $\epsilon$  的第  $i$  个主方向矢量.

基于能量等效原理<sup>[1]</sup>,损伤的弹性张量  $E$  的表示式为:

$$E = (I - \tilde{D}) \cdot E^0 \cdot (I - \tilde{D}) \quad (28)$$

式中  $E^0$  为无损的弹性张量,  $\tilde{D}$  为活跃损伤张量.

本文采用的损伤势函数为:

$$F^D = \sqrt{Y : P^+ : Y} - \phi_0 \quad 0, \quad (29)$$

式中  $\phi_0$  为损伤开始扩展时的损伤势值.

### 2.2 Mohr-Coulomb 准则的均匀化

均匀化 (Homogenization)<sup>[12]</sup>是除了细观力学之外,建立宏细观之间关系的有效途径.给定含裂纹的、处于平面应变状态的表示体元,如图 1 示.在压应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  的作用下,将沿某平面产生按 Mohr-Coulomb 准则的屈服.不失一般性,设剪切屈服面上含有两条裂纹,其中一条为张开裂纹,对应活跃损伤,用  $\tilde{d}_n^a$  表示;另一条为闭合裂纹,对应不活跃损伤,用  $\tilde{d}_n^i$  表示.图中  $n$  表示临界面的法向,  $t$  表示临界面的切向矢量.

在细观上,对于图 1 单元中的无损材料部分,其 Mohr-Coulomb 准则为:

$$F_t^P = \tau_n^t - \mu_t \tau_n^t - c^t = 0, \quad (30)$$

式中  $\tau_n^t$  和  $\tau_n$  分别为滑动面上无损材料部分的细观剪应力和正应力;  $c$  及  $\mu$  分别为抗剪强度和摩擦系数. 角标  $t$  表示无损材料部分. 对于图1单元中的不活跃损伤材料部分, 既闭合裂纹部分, 其局部的 Mohr-Coulomb 准则为:

$$F_{id}^P = \tau_n^{id} - \mu_{id} \tau_n^{id} - c^{id} = 0. \quad (31)$$

对于图1单元中的活跃损伤材料部分, 既张开裂纹部分, 形式上其局部的 Mohr-Coulomb 准则为:

$$F_{ad}^P = \tau_n^{ad} - \mu_{ad} \tau_n^{ad} - c^{ad} = 0. \quad (32)$$

根据均匀化原理, 宏观应力是细观应力的均

匀化体现. 在图1单元中, 宏观应力与细观应力之间存在如下等效关系:

$$\tau_n = \tau_n^t (1 - \tau_n^{ad} - \tau_n^{id}) + \tau_n^{id} \tau_n^{id}, \quad (33)$$

$$\tau_n = \tau_n^t (1 - \tau_n^{ad} - \tau_n^{id}) + \tau_n^{id} \tau_n^{id}. \quad (34)$$

式中  $\tau_n^{ad} = \tilde{D}_{ij} n_i n_j$ ,  $\tau_n^{id} = (D_{ij} - \tilde{D}_{ij}) n_i n_j$ ; 分别为临界面上的活跃损伤分量和不活跃损伤分量. 设作用在张开裂纹面上的细观应力分量  $\tau_n$  为0, 作用在闭合裂纹面上的细观应力分量  $\tau_n$  取为与无损材料部分的细观应力分量相同, 既:

$$\tau_n^{ad} = 0, \tau_n^t = \tau_n^{id} = \tau_n (1 - \tau_n^{ad})^{-1}. \quad (35)$$

则可得均匀化了的 Mohr-Coulomb 准则为:

$$\tau_n = c^* + \mu^* \tau_n. \quad (36)$$

式中  $\tau_n$  及  $\tau_n$  为宏观应力, 系数为考虑损伤均匀化后的等效值. 其计算式为:

$$\mu^* = (1 - \tau_n^{ad}) [\mu^t (1 - \tau_n^{ad} - \tau_n^{id}) + \mu^{id} \tau_n^{id}], \quad (37)$$

$$c^* = c^t (1 - \tau_n^{ad} - \tau_n^{id}) + c^{id} \tau_n^{id}. \quad (38)$$

由于正交异性损伤的影响, 耦合后的塑性也是正交异性的, 从而必须在计算中使用均匀化的 Mohr-Coulomb 准则检验三个正交异性主轴方向上的应力加-卸载状态, 计算塑性流动. 三个正交异性主轴方向的确要考考虑损伤和应力两个方面的因素.

设第  $i$  个摩擦滑动临界面的主方向矢量为  $v_i$ , ( $i = 1, N$ ), 这里  $N$  为摩擦滑动临界面的总数. 这样式(37) 可以改写为:

$$\tau_{ni} = c_i^* + \mu_i^* \tau_{ni}, \quad (39)$$

角标  $i$  表示上述张量在第  $i$  个临界面上的分量值.

正交各向异性的塑性应变增量计算公式为:

$$\dot{\epsilon}^P = \sum_{i=1}^3 \dot{\epsilon}_i^P \frac{\partial F_i^P}{\partial \sigma}, \quad (40)$$

这里  $\dot{\epsilon}_i^P$  可依给定的总应变增量  $\dot{\epsilon}$  及  $F^P = F_i^P$ , 从式(21) 及式(22) 中解得. 当损伤与塑性同时加载时必须联立求解二式.

综合以上各式(式(26) - 式(40)), 既得正交异性塑性损伤耦合宏观唯象本构模型的诸方程.

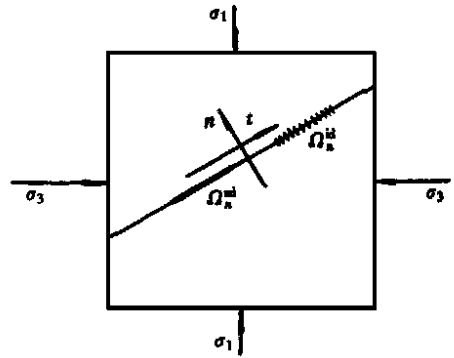


图1 含有裂纹的二维体的摩擦滑动临界面示意图

### 3 结 语

本文建立了正交异性塑性损伤耦合宏观唯象本构模型,给出了相应本构理论的诸方程.本研究的特点为:

1) 提出了基于热力学及微结构分析的正交异性塑性损伤耦合宏观唯象本构模型.在塑性及损伤的演化计算中均采用了关联的流动准则,扩容效应通过损伤应变来计算.

2) 从对含裂纹单元的细观分析入手,通过均匀化(Homogenization)处理,将损伤引入到Mohr-Coulomb条件中,建立了正交异性塑性损伤耦合宏观唯象本构模型,给出了均匀化了的Mohr-Coulomb准则以及相应的方程式.耦合模型既考虑了剪切强度劣化,又可反映摩擦系数降低,比已有的模型有优越之处.

3) 损伤应变的计算是基于内变量理论进行的,无须引入新的材料参数.扩容效应通过损伤应变来计算这一措施是使得模型可以采用关联的塑性流动法则.

#### [参 考 文 献]

- [1] Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. 2nd ed[M]. Berlin: Springer, 1990.
- [2] Hansen N R, Schreyer H L. A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage [J]. Int J Solids Structures, 1994, **31**(2): 359—389.
- [3] Hayakawa K, Murakami S. Thermodynamic modeling of elastic-plastic damage and experimental validation of damage potential [J]. Int J Dama Mech, 1997, **6**(2): 333—363.
- [4] Mariotti de Sciarra F. A new variational theory and a computational algorithm for coupled elastoplastic damage models [J]. Int J Solids Structures, 1997, **34**(9): 1761—1796.
- [5] Basista M, Gross D. The sliding crack model of brittle deformation: an internal variable approach [J]. Int J Solids Structures, 1998, **35**(3): 487—509.
- [6] Dragon A, Halm D. A mesocrack damage and friction coupled model for brittle materials [A]. In: Voyiadjis G Z, Ju J W, Chaboche J L Eds. Damage Mechanics in Engineering Materials [C]. Amsterdam: Elsevier Science, 1998, 321—336.
- [7] Meschke G, Lackner R, Mang H A. An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete [J]. Int J Numer Mech Engng, 1998, **42**(3): 703—727.
- [8] Yazdani S, Karnawat S. A constitutive theory for brittle solids with application to concrete [J]. Int J Dama Mech, 1996, **5**(1): 93—110.
- [9] Vutukuri V S, Lama R D, Saluja S S. Handbook on Mechanical Properties of Rocks [M]. Vol. 1. Berlin: Trans Tech Publisher, 1974.
- [10] Duveau G, Shao J F. A modified single plane of weakness theory for the failure of highly stratified rocks [J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1998, **35**(6): 807—813.
- [11] Hoek E, Brown E T. Practical estimation of rock mass strength [J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1997, **34**(8), 1165—1186.
- [12] Muller D, Kratochvil J, Berveiller M. Nonlocal versus local elastoplastic behavior of heterogeneous materials [J]. Int J Plasticity, 1993, **9**(3): 633—645.
- [13] Rice J R. Inelastic constitutive relations for solids: an internal variable theory and its application to metal plasticity [J]. J Mech Phys Solids, 1971, **19**(2): 433—455.
- [14] Swoboda G, Shen X P, Rosas L. Damage model for jointed rock mass and its application to tunneling [J]. Computer and Geotechnics, 1998, **22**(3/4): 183—203.

## Constitutive Theory of Plasticity Coupled With Orthotropic Damage for Geomaterials

SHEN Xin-pu<sup>1</sup>, Zenon Mroz<sup>2</sup>, XU Bing-ye<sup>3</sup>

(1. Department of Architectural Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, P R China;

2. IFTR, Polish Academy of Sciences, Warsaw 00-049, Poland;

3. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, P R China)

Abstract: Constitutive theory of plasticity coupled with orthotropic damage for geomaterials was established in the framework of irreversible thermodynamics. Prime results include: 1) evolution laws are presented for coupled evolution of plasticity and orthotropic damage; 2) the orthotropic damage tensor is introduced into the Mohr-Coulomb criterion through homogenization. Both the degradation of shear strength and degradation of friction angle caused by damage are included in this model. The dilatancy is calculated with the so-called damage strain.

Key words: damage; plasticity; coupling; dilatancy; geomaterial