

循环载荷下层间界面 反平面剪切破坏的解析解: 1. 卸载行为

沈新普¹, Zenon Mroz²

(1. 东北大学理学院, 沈阳 110006; 2. IFTR, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland)

摘 要: 本研究利用“剪切梁”模型, 研究了由定常侧压力和周期性的反平面剪切周期载荷共同作用下, 层间界面的破坏规律。本文为本研究的第一部分, 解析地给出了界面上剪应力及位移场在卸载(反向加载)过程中的分布规律及演化规律。计算结果表明, 由于裂纹前方损伤过程区的存在, 卸载是非弹性的, 伴随有损伤和摩擦两种耗散机制; 另外, 当卸载过程不能覆盖加载过程造成的损伤区时, 会产生“应力锁死”现象, 从而导致结构在以后的加载过程中可能产生冲击载荷。

关键词: 层间界面; 反平面剪切; 破坏; 损伤; 循环载荷; 解析解
中图分类号: O342 **文献标识码:** A

1 引言

在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下, 层间裂纹及其扩展所导致的层间失效是复合材料、岩石等工程中重要的结构失效模式, 有关层间裂纹的综述可见于 Garg^[1]及 Hutchinson 和 Suo^[2]等的文章。文[3]研究了侧压力作用下反平面剪切单调载荷引起的层间裂纹的扩展规律, 并针对性地提出了能够反映层间界面断裂失效问题力学特性的剪切梁模型, 对剪切梁在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下的力学行为作了解析分析计算。文[3]给出的解析解清晰地展示了反平面剪切载荷及侧压力共同作用下, 层间界面上发生的力学过程中的诸多细节, 并为考察有关的数值解的可靠性提供了重要参考依据。

在现实工程中, 许多岩土结构承受的载荷是周期性循环变化的, 如水坝受水位涨落的力循环载荷, 四季变化引起的温度循环载荷等。初步的研究表明, 由于损伤软化区的存在, 循环载荷下界面结构的承载能力远低于单调载荷下的承载能力值。对于侧压力和循环反平面剪切载荷共同作用下层间界面的断裂失效问题, 目前国内外尚无文献报道。

本研究将应用文[3]提出的剪切梁模型, 研究由定常侧压力和循环反平面剪切载荷共同

收稿日期: 1999-10-28; 修改日期: 1999-12-29

基金项目: 由欧盟课题(INCO-Copernicus, ERBIC 15 CT970706)和东北大学青年科学基金课题(856049)共同资助

作者简介: 沈新普(1963), 男, 河北人, 副教授, 博士, 从事结构塑性与破坏力学研究

作用下, 界面层上的各力学量的变化规律。本文为本研究的第一部分, 文中将解析地给出界面层上剪应力及位移场在卸载(反向加载)过程中的分布规律及演化规律。

为了叙述的完整性, 这里首先来重新介绍一下文[3]所提出的剪切梁模型及刚塑性界面层材料的本构关系。

2 问题的描述及剪切梁模型

文[3]首先介绍了受反平面剪切作用的平面应变梁的弹性力学理论。如图 1 所示, 为一对受反平面剪切作用的梁, 梁间为“粘性层(内聚力层)。由于问题的对称性, 取上部的梁为研究对象, 几何尺寸标于图 1 中。均布侧压力 $s_{zz} = s_n$ 作用于梁的上表面, 在梁的 $x=0$ 一端作用有剪切载荷 $t(0) = t_{yx}(0)A$, 这里 $A=bt$, 另一端 $X=L$ 为自由端, 假设梁的宽度 b 远大于厚度 t , 忽略梁的弯曲效应, 从而近似认为梁为反平面剪切状态下的平面应变梁。这样梁内只有非零剪应力 t_{yx} 和 t_{yz} 及侧压力 $s_{zz} = s_n = const$ 作用, 其他应力分量为零, 从而由弹性力学得梁的平衡方程为:

$$\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

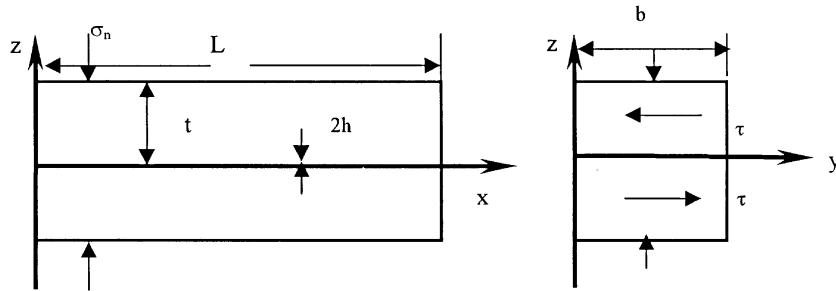


图 1 由粘性层(内聚力层)结合的一对梁

用 $w = w(x, z)$ 表示上部的梁沿 y 轴的位移, 并且应用 Hooke 定律, 有:

$$t_{yz} = -G_2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad t_{xy} = -G_1 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$

则(1)式化为:

$$G_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

式中 G_1, G_2 分别为沿 x 轴和沿 z 轴的剪切模量。梁的力边界条件为: 底部(即层间界面上) $z=0$, $t_{yz} = -t_f$, 上表面 $z=t$, $t_{yz} = 0$, 加载端 $x=0$, $t_{xy}(0) = f_0(y, z)$, 自由端 $x=L$, $t_{xy}(L) = 0$ 。

文[3]为了简化问题模型, 假设 t_{yz} 沿 z 轴的分布为线性分布, 即:

$$t_{yz} = t_f(x) \left(\frac{z}{t} - 1 \right) \quad (4)$$

式中 $t_f(x)$ 表示层间界面 $z=0$ 上的剪切应力。以 t 表示 t_{xy} , 即 $t_{xy} = t$, 则式(1)化为

$$\frac{\nabla t}{\nabla x} + \frac{t_f}{t} = 0 \tag{5}$$

式(5)是用弹性力学的方法，通过引入简化假设条件式(4)而得到的简化了的反平面剪切问题的平衡方程式。

文[3]的“剪切梁”模型如图 2 示，为一个置于刚性摩擦基础上的只受剪力作用的弹性梁，梁内的弯曲效应忽略不计，梁与基础之间有厚为 h 的内聚力层，几何尺寸示于图 2。设梁内各点的位移沿 z 向为常数， $w = w(x)$ ，即 $\partial w / \partial z = 0$ ，且有：

$$t = -G \frac{dw}{dx} \tag{6}$$

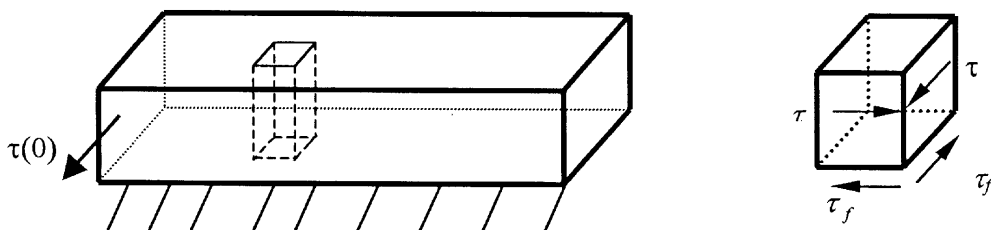


图 2 剪切梁示意图

弹性梁中的应力 t 与梁下底面的粘性夹层中的应力 t_f 形成自平衡系统^[4]，即有如下关系式成立：

$$A \frac{dt}{dx} + b t_f = 0 \tag{7}$$

式中 $A = bt$ 。式(7)的位移形式为：

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{b}{AG} t_f = \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{t_f}{tG} = 0 \tag{8}$$

比较式(5)和式(7)，可以得出结论：上述剪切梁模型与简化了的侧压作用下的反平面剪切层间界面问题是等效的。另外，文[3]声明了剪切梁不是真梁，并不具备梁的所有特性。

对厚度为 h 的粘性界面层，用 G_f 表示界面层材料的剪切模量，界面层的刚度 $K = G_f / h = \infty$ ，也就是忽略界面层的弹性性能的影响，即得刚塑性界面层材料的本构模型的本构关系的刚塑性本构关系，如图 3 示，其方程式为：

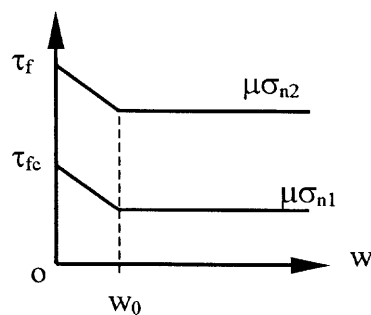


图 3 刚塑性界面层材料的本构关系示意图

$$t_f = t_{fc} - K_s w, \text{ 如果 } w < w_0 = \frac{t_{fc} - t_s}{K_s}; \tag{9}$$

$$t_f = t_s = m s_n, \text{ 如果 } w_0 < w$$

用 g_f 表示界面层的剪应变，则

$$g_f = \frac{w}{h} \quad (10)$$

侧压下已经剪裂的裂纹面上的滑动摩擦力为 $t_s = ms_n$ ， m 为滑动摩擦系数。

在以下的叙述中，本文将沿用文[3]的所有变量定义。

相应于一个载荷循环(本文假定为力载荷循环)，层间界面上将发生以下过程：(1) 单调加载过程；(2) 卸载(或反向加载)过程；(3) 再加载过程。

在以上三个过程中，剪切梁模型的以下基本关系式总是成立的：

$$t = -G \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dt}{dx} + t_f = 0 \quad (11)$$

周期载荷属于复杂载荷，又由于损伤区的存在，这一过程属于非弹性过程，应力状态与加载历史有关，一般地讲，应该用增量形式的本构描述。但由于式(11)所示关系的存在，使得我们可以使用全量形式的方程计算周期载荷下剪切梁内的各力学量。

关于剪切梁模型的单调加载过程行为的研究已在文[3]中作了详细介绍，本文的重点限于对剪切梁模型卸载(反向加载)过程行为的研究。

3 卸载过程的剪应力及位移解

在卸载过程中，由于弹性梁中反力的作用，界面层上首先发生自加载端 $x=0$ 处开始的反向位移。由于 s_n 的影响，对应图 4 所示的周期载荷，初始加载裂纹稳定扩展时，在界面层中的剪应力 t_f 的分布如图 5 示。滑动摩擦力 $ms_n s_1$ (图 5 中矩形面积 OABCO) 和加载损伤区尾点 $x = s_1$ 处的剪应力 $t(s_1)$ 的值的相对大小影响周期载荷作用下界面层的力学行为。

对应图 4 中折线 odef 所示的周期载荷，界面层中可能的情况有如下两种：

- (1) 如果 $ms_n s_1 \geq t(s_1)$ ，卸载时将只有滑动摩擦过程发生；
- (2) 如果 $ms_n s_1 \leq t(s_1)$ ，卸载时将不仅有滑动摩擦过程发生，还会有裂纹扩展并形成卸载二次损伤区。

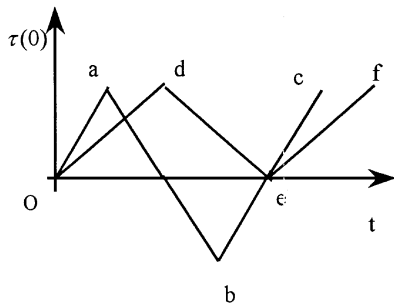


图 4 周期载荷示意图

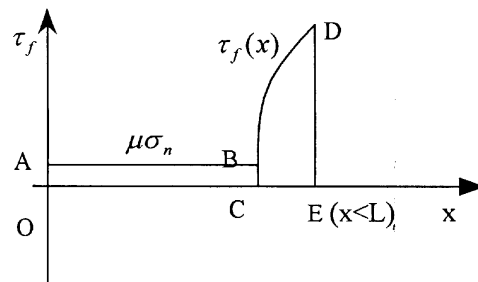


图 5 界面层上 t_f 分布示意图

特别地，如果 ms_n 足够小，对应图 4 中折线 oabc 所示的周期载荷，卸载时在界面层中将不仅有滑动摩擦过程并形成卸载二次损伤区，还会形成新的卸载一次损伤区，即裂纹和损伤区都有了扩展。

本文的卸载过程是非弹性的，且具有反向加载特性。卸载时，在加载损伤过程区内，由于损伤造成的强度劣化，加载损伤过程区的 t'_{fc} 发生如式(12)所示的变化：

$$\mathbf{t}'_{fc}(x) = \mathbf{t}_{fc} - K_s w^{(0)}(x) \geq m\mathbf{s}_n, \quad (s_1 \leq x \leq s_2) \quad (12)$$

当卸载过程扩展进入到加载损伤区时, 由式(12)知, 摩擦滑动区将立即向前扩展, 亦即宏观裂纹扩展。这样, 对应一个力载荷的完全卸载过程, 界面层上将发生以下过程:

(1) 自加载端 $x=0$ 开始的反向摩擦滑动 ($0 \leq x \leq s_{31}$, s_{31} 表示反向摩擦滑动的前锋)。

(2) 反向滑动区进入加载损伤区, 二次损伤区形成 ($s_{31} \leq x \leq s_{32}$, s_{32} 表示二次损伤区前锋)。

(3) 卸载引起的新的损伤区扩展 ($s_2 \leq x \leq s_{42}$, s_{42} 表示卸载一次损伤区前锋)。

以下依次讨论各区的剪力及位移解。

3.1 反向摩擦滑动区 $[0, s_{31}]$ 内的剪力及位移解。

反向摩擦滑动区应力点的平衡方程:

$$\frac{d\mathbf{t}}{dx} = -m\mathbf{s}_n = -\mathbf{t}_f \quad (13)$$

积分并利用 $x=s_{31}$ 处剪力 \mathbf{t} 的连续条件可得:

$$\mathbf{t}(x) = -m\mathbf{s}_n(x - s_{31}) + \mathbf{t}(s_{31}) \quad (14)$$

利用式(11)中的第二式, 代入上式, 积分并利用 $x=s_{31}$ 处的位移连续条件 $w = w(s_{31})$ 可得:

$$w(x) = \frac{m\mathbf{s}_n}{G} \left(\frac{x^2}{2} - s_{31}x + \frac{s_{31}^2}{2} \right) + \frac{\mathbf{t}(s_{31})}{G} (s_{31} - x) + w(s_{31}) \quad (15)$$

此时 $w(s_{31}) \neq w_0$, 必须通过下文中的二次损伤区的解来确定。

3.2 卸载二次损伤区 $[s_{31}, s_{32}]$ 内的剪应力及位移解

如图 6 示, 二次损伤区应力点的全量形式的本构方程为:

$$\mathbf{t}_f = \mathbf{t}_{fc}^{(1)} - K_s \mathbf{D}w \quad (16)$$

式中 \mathbf{t}_f 为卸载过程中界面层上的剪切应力值,

$\mathbf{D}w$ 为此时界面上的卸载位移量, 其值为:

$$\mathbf{D}w = w - w^{(0)} \quad (17)$$

式中 $w^{(0)}$ 为加载过程产生的位移历史, 由文[3]知 $w^{(0)}$ 的值:

$$w^{(0)}(x) = c_1 \cos(r_s x) + c_2 \sin(r_s x) + \frac{\mathbf{t}_{fc}}{K_s} \quad (18)$$

$$c_1 = \frac{\mathbf{t}_{fc}}{K_s} \cos(r_s s_2), \quad c_2 = \frac{\mathbf{t}_{fc}}{K_s} \sin(r_s s_2), \quad r_s = \frac{K_s}{G} \quad (19)$$

式(16)中 $\mathbf{t}_{fc}^{(1)}$ 为加载损伤区内各点的残余强度值, 为:

$$\mathbf{t}_{fc}^{(1)}(x) = \mathbf{t}_{fc} - K_s w^{(0)} \quad (20)$$

结合图 6, 卸载时剪力 \mathbf{t}_f 取反向, 故有

$$\mathbf{t}_{fc}^{(1)} = -[\mathbf{t}_{fc} - K_s w^{(0)}] \quad (21)$$

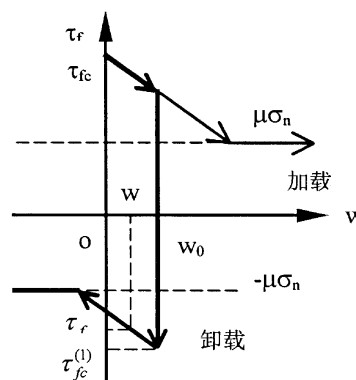


图 6 刚塑性界面层材料卸载本构关系示意图

将式(17)及式(21)代入式(16), 可得界面上卸载二次损伤区内的本构关系为:

$$\mathbf{t}_f = -\mathbf{t}_{fc} + 2K_s w^{(0)} - K_s w \quad (22)$$

将式(22)代入式(11)并整理, 得位移形式的平衡方程:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{K_s}{G} w = \frac{\mathbf{t}_{fc}}{G} + \frac{2K_s}{G} [c_1 \cos(r_s x) + c_2 \sin(r_s x)] \quad (23)$$

求解上述二阶非齐次常微分方程可得位移全解为:

$$w(x) = \cos(r_s x)(c_5 - c_2 r_s x) + \sin(r_s x)(c_6 + c_1 r_s x) + \frac{\mathbf{t}_{fc}}{K_s} \quad (24)$$

式中 c_5, c_6 为积分常数, 可通过 $x=s_{32}$ 点处应力与位移的连续条件求得。现略去过程, 给出 c_5, c_6 的表达式为:

$$\begin{aligned} c_5 &= \frac{1}{r_s} [B_2 r_s \cos(r_s s_{32}) - B_1 \sin(r_s s_{32})] \\ c_6 &= [B_1 + c_5 r_s \sin(r_s s_{32})][r_s \cos(r_s s_{32})]^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} B_1 &= -\left[\frac{\mathbf{t}(s_{32})}{G} + A_3 + A_4\right], & B_2 &= w(s_{32}) + A_1 + A_2 \\ A_1 &= c_2 r_s s_{32} \cos(r_s s_{32}), & A_2 &= c_1 r_s s_{32} \sin(r_s s_{32}) \\ A_3 &= (c_1 r_s^2 s_{32} - c_2 r_s) \cos(r_s s_{32}), & A_4 &= (c_2 r_s^2 s_{32} + c_1 r_s) \sin(r_s s_{32}) \end{aligned} \quad (26)$$

式中的 $w(s_{32})$ 和 $\mathbf{t}(s_{32})$ 均可由加载损伤过程区的解即文[3]中式(28)求得。

将式(24)代入式(22), 可得 $\mathbf{t}_f(x)$ 的表达式; 而将式(24)代入式(11)并微分, 则可得 $\mathbf{t}(x)$

的表达式, 此处略。

3.3 卸载二次损伤区边界点 s_{31} 的确定方法

给定 s_{32} 值, 按照平衡方程和本构关系, 会有一个对应的 s_{31} 。本文将 $x=s_{31}$ 点处界面层上的剪应力 \mathbf{t}_f 连续条件作为确定 s_{31} 值的条件方程:

$$\mathbf{ms}_n = \mathbf{t}_{fc} - 2K_s w^{(0)}(s_{31}) + K_s w(s_{31}) \quad (27)$$

给定一组 s_{32} 值, 利用上式, 可求得相应的一组 s_{31} 值。

卸载过程中给定状态下界面层中剪应力 \mathbf{t}_f 的分布情况可参见图7。图中实线为卸载摩擦滑动区到达损伤区边缘时的应力分布, 虚线为卸载二次损伤区形成的应力分布。计算过程中界面层的参数取值为:

$$G_s = 2.3438 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad \mathbf{t}_{fc} = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa},$$

$$h = 0.016, \quad \mathbf{ms}_n = 0.176 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad L = 1.0$$

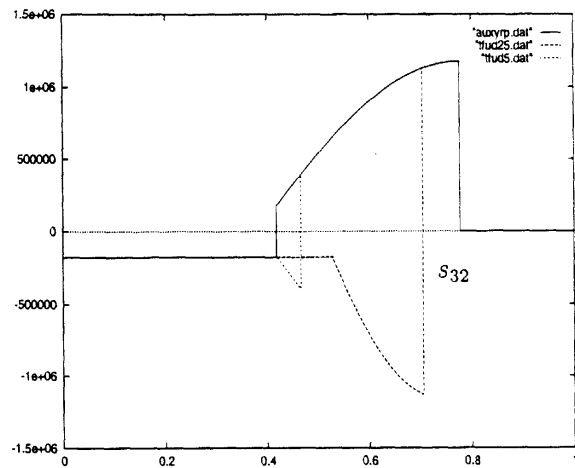


图7 卸载过程中界面层上的剪应力 \mathbf{t}_f 的分布

同时，弹性梁的剪切模量 G 取值与界面层的剪切模量 G_s 相同。

从图 7 中看出，当力载荷卸载过程不能完全“抹掉”加载损伤区时，加载损伤区部分应力将被“锁死(Locking)”在结构中。这一点不仅与岩石工程中岩石的应力“锁死”现象一致，而且说明了岩石的应力锁死现象源于压应力作用下，剪切损伤区的存在。应力锁死现象在实际上还会导致结构的不稳定：当再加载过程产生的损伤区完全覆盖卸载二次损伤过程区并发展到与“应力锁死区”相联通时，已“锁死”的应力会释放出来，从而产生一个跳跃的载荷增加，某种特定情况下可能会由于冲击载荷而导致结构失稳。

3.4 卸载过程中加载端 $x=0$ 处的位移载荷关系

利用式(14)-式(15)可得：

$$w(0) = \frac{ms_n s_{31}^2}{2G} + \frac{t(s_{31})}{G} s_{31} + w(s_{31}) \quad (28)$$

$$t(0) = ms_n s_{31} + t(s_{31})$$

式中 $t(s_{31})$ 及 $w(s_{31})$ 可由相应的式(24)等方程及 s_{31} 值确定。以 s_{31} 为卸载控制变量，由上式即可解得卸载时的位移载荷关系曲线，如图 8 所示。

当卸载造成的损伤区越过加载损伤区，造成新的损伤区的出现及扩展时，令 s_{42} 表示新的卸载损伤区（一次损伤区）的前锋，则卸载一次损伤区的应力及位移解形式上与文^[3]式(28)相同，只是其中的 t_{fc} 为 $-t_{fc}$

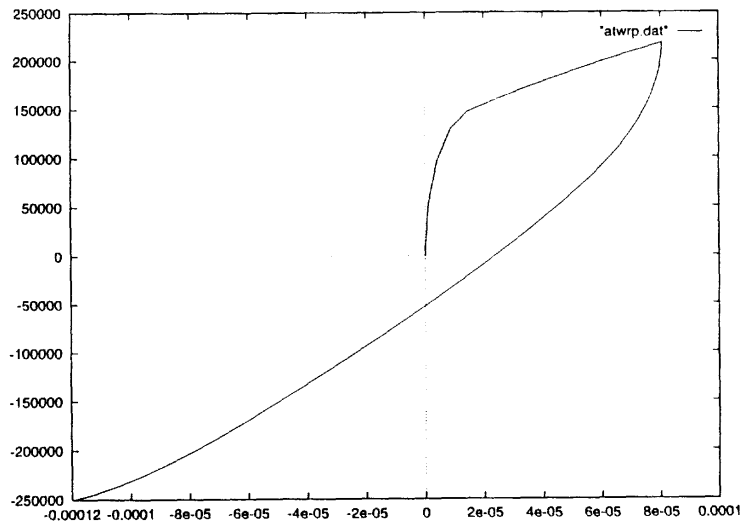


图 8 反向等幅值的力载荷循环加卸载的载荷—位移曲线

所代替。在这种情况下，卸载二次损伤区的解中 $t(s_{32})$ 和 $w(s_{32})$ ，将由卸载一次损伤区的解即修正 t_{fc} 后的文^[3]式(28)解得，此处略。

4 结论

本文利用“剪切梁”模型，研究了由定常侧压力和循环反平面剪切载荷共同作用下，层间界面的破坏规律，解析地给出了界面层上剪应力及位移场在卸载(反向加载)过程中的分布规律及演化规律。文中给出的全量形式的解简洁明了，易于应用。

本文计算结果表明，由于裂纹前方损伤过程区的存在，卸载是非弹性的，伴随有损伤和摩擦两种耗散机制，相应的剪应力及位移场对载荷历史有“记忆”功能。

本文计算结果展示出，由于裂纹前方损伤过程区的存在，当卸载过程不能覆盖加载过程造成的损伤区时，会产生“应力锁死”现象。由于载荷 $t(0)$ 是层间界面应力 $t_f(x)$ 的积

分, 不难想象, 当周期载荷的某一个再加载过程与“应力锁死区”相联通时, “锁死”的应力的释放会导致载荷跳跃, 产生“冲击”, 并进一步导致结构失稳。这一点对正确认识地震等地质结构的失稳有重要意义。

参考文献:

- [1] A C Garg. Delamination - a damage mode in composite structures[J]. *Engrg Fract Mech*, 1988, 29(2): 557-584.
- [2] J W Hutchinson and Z Suo. Mixed mode cracking of layered materials[A]. *Adv Appl Mech*[C]. Eds: W Hutchinson and T Y Wu, 29, Academic Press, New York, 1991. 63-191.
- [3] Zenon Mroz, Shen Xinpu. Analysis of progressive interface failure under monotonic loading[A]. In: B. Xu, M. Tokuda, X. Wang eds. *Proc. of Inter. Conf. on Micro-Mech. & Mater*[C]. International Academic Publisher, Sept., 1999, Beijing, 109-114.
- [4] A Jarzebowski and Z Mroz. On slip and memory rules in elastic, friction contact problems[J]. *Acta Mech.*, 1994, 102(1): 119-216.

ANALYTICAL SOLUTION FOR INTERFACE FAILURE UNDER CYCLIC LOADING: 1. UNLOADING BEHAVIOR

SHEN Xin-pu¹, Zenon Mroz²

(1. College of Science, Northeastern University, Shenyang, China, 110006;

2. Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland)

Abstract: In this study, the interface failure under the joint action of constant compression and periodical anti-plane shear is investigated. With the so-called “shear beam model”, analytical solutions are developed for the evolution law and the distributions of shear stress and displacement along the entire length of the interface during unloading processes. Results indicate that, owing to the existing of the damage process zone ahead of the crack tip, unloading is inelastic and accompanied by friction and damage dissipation. Furthermore, “stress locking” occurs if unloading process does not cover the damage zone left by loading process. Consequently, “shocking load” may occur in ensuing reloading process.

Key words: interface layer; anti-plane shear; failure, damage; cyclic loading; analytical solution