

# 弹脆塑性软化本构理论的特点及其数值计算\*

沈新普, 岑章志, 徐秉业

清华大学 工程力学系

**文 摘:** 对大型复杂工程岩体结构,其材料的宏观力学性能的变形劣化是结构在外界条件作用下变形增加和稳定性降低的主要因素之一。本文通过引入应力跌落时发生各向同性软化的假定,给出了完整的弹脆塑性本构积分的数值格式和增量型弹脆塑性有限元求解算法。由典型结构的数值解与相应的解析解比较可见,本文数值解的精度是令人满意的。这说明本文弹脆塑性本构积分数值格式是合理的、有效的。所设计的有限元计算程序能够用于弹脆塑性材料组成的结构的力学行为的分析。

**关键词:** 弹脆塑性; 本构积分; 应力跌落; 应变软化

**分类号:** O 344

岩石类材料在应力达到强度极限后,随变形的继续增加,其强度值迅速降低到一个较低的水平,这种由于变形引起的材料性能的劣化被称为“应变软化”现象。由于应变软化的影响,结构变形稳定发展到一定程度之后,会突然失去变形稳定性,导致结构的动态破坏失效,甚至造成灾难。如煤矿巷道施工中的岩爆现象就是由于材料的脆性失稳引起的。另一方面,由于某些岩土工程如井下采煤等就是在结构局部不断破坏的条件下进行施工的。破裂的岩体仍具有一定的残余承载力,因此岩石(体)的弹脆塑性性能对工程设计与施工有重要影响。

岩石类材料应变软化的力学机理十分复杂。现有的模型基本上可分为两类:细观力学模型<sup>[1~6]</sup>和宏观唯象模型<sup>[7~14]</sup>。应变软化材料的弹脆塑性本构模型由 Dems 和 Mroz 在 1985 年提出<sup>[15]</sup>。与前述的模型相比,该模型与某些岩石的位移—载荷全过程曲线符合得较好,较好地反映出某些岩石在达到强度极限后承载力迅速下降的特点。

本文从应变软化材料的加载—卸载准则的讨论开始,研究弹脆塑性本构模型引入后的增量型的本构理论表述中的某些特点;之后,进一步研究弹脆塑性本构关系积分的数值格式;最后设计出适用于模拟弹脆塑性应变软化材料结构的力学行为的有限元程序,并通过实例,与解析解进行对比考核。

## 1 弹脆塑性增量本构理论的特点

### 1) 弹脆塑性软化材料的弹塑性变形时的加—卸载准则

按照经典塑性理论<sup>[16]</sup>,对理想塑性或强化塑性材料,应力点在加载时其应力增量的方向指向加载面外侧,卸载时应力增量方向指向加载面的内侧;而对于软化塑性材料,应力点在加载时应力屈服面收缩,应力增量指向当时屈服面的内侧,即加载与卸载对应的应力增量的方向

收稿日期: 1994-04-02

\* 自然科学基金项目

相同。因而一般讲,由应力空间中确定的加一卸载准则函数:

$$l_1 = (\partial f / \partial \sigma)^T d\sigma \quad (1)$$

是不能区别应变软化材料应力点的加一卸载状态的,必须取应变空间中的量才能描述软化材料的加一卸载准则。因为在应变空间中,加载时,应变增量指向屈服面的外侧,卸载时应变增量指向屈服面的内侧。这样就有应变空间中的加一卸载准则函数<sup>[16]</sup>:

$$l_2 = (\partial F / \partial \epsilon)^T d\epsilon \quad (2)$$

由于屈服条件一般都是在应力空间中定义的,所以必须要找出 $l_1$ 与 $l_2$ 之间的对应关系,以使应力形式的屈服条件能适于应变软化材料,通过引入变换:

$$\begin{cases} \sigma^p = D\epsilon^p \\ \sigma = D(\epsilon - \epsilon^p) \end{cases} \quad (3)$$

经换算可得出用于应变软化材料的加一卸载准则函数:

$$l_2 = (\partial f / \partial \sigma)^T D d\epsilon \quad (4)$$

上式中的 $D$ 是弹性矩阵, $Dd\epsilon$ 就是按弹性规律计算得到的 $d\sigma$ ,这样在应变空间中定义的加一卸载准则就转化为与其等效的应力空间的流动矢量与弹性应力增量来确定的加一卸载准则。

## 2) 复杂应力状态下应力跌落过程分析

在确定了应力空间中应变软化材料的加一卸载准则之后,利用位移型的有限元法,可以方便地对应变软化材料的力学行为进行分析计算。但是,脆塑性本构模型使用中的问题还在于脆性软化的应力跌落形式是非增量形式的突变。复杂应力状态下应力点从初始屈服面向后继屈服面的迁移是瞬时完成的,其迁移过程中各应力分量的变化由于屈服函数的不确定性而无解。为了克服这一困难,本文设定应力跌落过程中各应力偏量分量的原有比例保持不变,即应力跌落是从初始屈服面沿着径向向后继屈服面跌落的。这样,设初始屈服面上的应力水平为 $\sigma^{(r)}$ ,残余强度系数为 $\beta$ ,跌落过程中的应力偏量变化量为:

$$\Delta s = (1 - \beta)s^{(r)} \quad (5)$$

由于在跌落过程中总应变保持不变,产生的塑性应变的增加由弹性应变的减少所抵消,故其等效塑性应变增量为:

$$\Delta \bar{\epsilon}^p = (1 - \beta)\sigma_s / E \quad (6)$$

且有

$$\Delta s^p = \Delta s \quad (7)$$

当应力点完成了从初始屈服面向后继屈服面的跌落之后,将在塑性不平衡力的作用下,继续在后继屈服面上作塑性流动,其塑性流动的计算与常规的理想塑性增量本构理论中所述相同<sup>[17]</sup>。

## 3) 屈服条件

引入脆塑性跌落本构模型之后,屈服面分为初始屈服面 and 后继屈服面。对于未曾屈服过的应力点的应力状态的判断应以初始屈服面为依据;对于曾经屈服过的应力点,则用后继屈服面为依据。两种屈服面的差别在于后者的强度极限为残余强度。对于外法线方向不连续的屈服面,如 Tresca 屈服面和 Mohr-Coulomb 屈服面,应在尖角处作适当处理才能使得跌落合理。

## 2 弹脆塑性本构积分的数值格式

根据上述分析与假设,得出弹脆塑性本构积分的数值格式为:

1) 按弹性规律计算第  $r$  迭代步载荷产生的应力增量:

$$d\sigma^{(r)} = Dd\epsilon \quad (8)$$

2) 用  $\sigma_i^{(r)} = \sigma^{(r-1)} + d\sigma^{(r)}$  计算本步的试探应力, 式中  $\sigma^{(r-1)}$  是迭代  $(r-1)$  次后的应力。

3) 检查该点是否以前已经发生过跌落。

4) 若未屈服过, 则

a) 检查应力点在本次迭代中是否屈服。对于在迭代中屈服的高斯点, 计算:

$$R = (\bar{\sigma}_i^{(r)} - \sigma_i) / (\bar{\sigma}_i^{(r)} - \bar{\sigma}^{(r-1)}) \quad (9)$$

这里,  $\bar{\sigma}$  为应力点处的等效应力值。

将应力点退回到初始屈服面上, 计算:

$$\sigma_0^{(r)} = \sigma^{(r-1)} + (1-R)d\sigma_0^{(r)} \quad (10)$$

b) 计算应力跌落。按比例将高斯点的应力从初始屈服面退回到后继屈服面上并累积由此产生的塑性应变的等效塑性应变:

$$\sigma^{(r)} = \beta S_0^{(r)} + \sigma_{m0}^{(r)}, \quad \bar{\epsilon}^p{}^{(r)} = \bar{\epsilon}^p{}^{(r-1)} + (1-\beta)\sigma_i/E \quad (11)$$

式中:  $\sigma_{m0}^{(r)}$  为本步的球形应力张量。

c) 对余下的部分  $Rd\sigma^{(r)}$  在后继屈服面上按增量法进行塑性流动计算:

$$d\sigma^{(r)} = \frac{R}{N}d\sigma^{(r)}, \quad \sigma_F^{(r)} = \sigma^{(r)} + \sum_{i=1}^N (d\sigma^{(r)} - d\lambda d_{D_i}), \quad \bar{\epsilon}^p{}^{(r)} = \bar{\epsilon}^p{}^{(r)} + d\lambda a^T d\sigma^{(r)} / \sigma_i \quad (12)$$

式中:  $a^T = \partial f / \partial \sigma$ ,  $d_D = Da$ ,  $d\lambda = (a^T D d\epsilon) / (a^T Da)$ 。

d) 检查应力点  $\sigma_F^{(r)}$  是否在后继屈服面上, 若有偏离, 则调整  $\sigma_F^{(r)}$  到后继屈服面上, 最终的  $\sigma^{(r)}$  为:

$$\sigma^{(r)} = \sigma_i \sigma_F^{(r)} / \bar{\sigma}_F^{(r)} \quad (13)$$

e) 对于在本步中未屈服的高斯点, 按弹性规律累积应力:

$$\sigma^{(r)} = \sigma^{(r-1)} + d\sigma^{(r)} \quad (14)$$

5) 对于已经发生过屈服的高斯点, 则重复步 4) 中的步骤 a, c, d, e 4 步, 在后继屈服面上计算塑性流动。

### 3 增量型弹脆塑性有限元求解格式

对于岩土工程材料, 由于材料性质与变形历史有关, 本构方程必须采用增量形式, 相应的有限元方程的型式也必须是增量型的。

考虑一个典型的载荷增量步  $\Delta R$ , 设在这个载荷增量施加之前作用有载荷  $R^{(m)}$ , 相应于  $R^{(m)}$  的位移、应变、应力分别为  $a^{(m)}$ ,  $\epsilon^{(m)}$  和  $\sigma^{(m)}$ , 并且  $\sigma^{(m)}$  为平衡态的应力, 即:

$$f = R^{(m)} - \sum_{V_e} B^T \sigma^{(m)} dV = 0 \quad (15)$$

由于  $\Delta R$  的施加, 累积载荷为  $R^{(m+1)}$ , 在  $\Delta R$  的作用下, 位移、应变和应力的增量分别为  $\Delta a$ ,  $\Delta \epsilon$ , 和  $\Delta \sigma$ , 则在  $\Delta R$  作用下的关于位移增量  $\Delta a$  的增量形式的有限元方程为:

$$K \Delta a = \Delta R \quad (16)$$

对于应变软化材料的结构, 由于进入塑性以后局部结构对应的刚度阵系数在迭代中是非正的, 刚度阵的正定性受到破坏, 致使迭代不收敛。在计算中一般要采取初始刚度迭代, 即取:

$$K = K_0 \quad (17)$$

应力转移法迭代求解(16)式的公式为:

$$\Delta \mathbf{a}^{(r+1)} = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{R}^{(r)}, \Delta \mathbf{R}^{(r)} = \mathbf{R}^{(m+1)} - \sum \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{(r)} dV_e \quad (18)$$

上式中  $\boldsymbol{\sigma}^{(r)}$  是第  $r$  次迭代后的总应力值。

根据  $\Delta \mathbf{R}^{(r)}$  作用下的  $\Delta \mathbf{a}$ , 可以计算出应变增量  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  和应力增量  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ 。当一个增量步迭代收敛时, 累计位移、应变和应力历史, 再进行下一个载荷增量步的计算。应力转移法迭代计算的收敛准则可取为总的失衡力的模与总载荷的模之比, 即:

$$\|\Delta \mathbf{R}^{(r)}\|_2 / (\|\mathbf{R}\|_2) \leq \delta \quad (19)$$

## 4 算 例

将上述的理论及算法, 编制成 FORTRAN 有限元程序, 计算受内压厚壁筒(见图1)中, 压力  $P = 14 \text{ MPa}$ , 内半径  $a = 1 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ , 材料常数示于图中, 采用 Tresca 屈服条件及脆塑性本构模型, 进行应力分析。

为了便于考核数值解的精度, 本文将数值结果与解析结果进行比较。解析分析结果<sup>[18]</sup>为: 在弹塑性载荷的作用下, 弹脆塑性材料的厚壁筒结构的应力分布沿径向分为两个区域: 区域1为塑性区, 区域2为弹性区。弹塑性区域分界面的半径为  $r_s$ , 弹性区的应力解答为:

$$\sigma_r = \frac{r_s^2}{2b} \sigma_s \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \sigma_\theta = \frac{r_s^2}{2b} \sigma_s \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (b \geq r \geq r_s) \quad (20)$$

塑性区 ( $a \leq r \leq r_s$ ) 的应力解答为:

$$\sigma_r = \beta \sigma_s \ln \frac{r}{a} - P, \sigma_\theta = \beta \sigma_s \left( 1 + \ln \frac{r}{a} \right) - P \quad (21)$$

弹塑性分界半径  $r_s$  由下式决定:

$$P = \beta \sigma_s \ln \frac{r_s}{a} + \frac{\sigma_s}{2} \left( 1 - \frac{r_s^2}{b^2} \right) \quad (22)$$

数值分析结果与相应点的解析解的比较列于表1中。

表1 厚壁筒弹脆塑性分析的解析解与数值解对照

MPa

点号	$\sigma_r$			$\sigma_\theta$		
	解析解	数值解	误差(%)	解析解	数值解	误差(%)
1	-13.028	-13.024	0.03	10.528	10.524	0.04
2	-8.8929	-8.9001	0.11	14.663	14.632	0.20
3	-4.931	-4.987	1.00	16.289	16.470	1.20
4	-1.628	-1.646	1.20	12.968	13.129	1.10

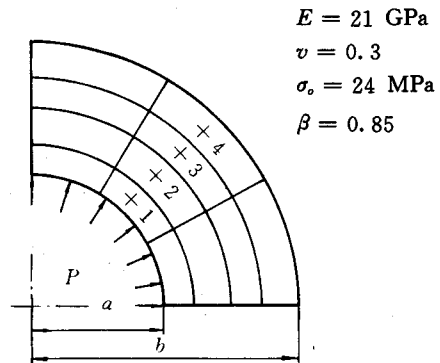


图1 受内压厚壁筒及选取的高斯应力点位置示意图

## 5 结 论

本文讨论了应力空间中定义的应变软化材料的加—卸载准则,对相应于脆塑性模型的增量本构理论作了阐述和探讨,给出了完整的弹脆塑性本构积分的数值格式。章末给出的数值解与相应的解析解相比,显示出本章结果的精度是令人满意的。这说明本章的数值积分格式是合理的、有效的,所设计的有限元计算程序能够用于弹脆塑性材料组成的结构的力学行为的分析计算。对大型工程岩石(体)结构,如深大岩石(体)边坡等,其结构的变形和稳定性主要取决于外部条件作用下软弱夹层等各种结构面的力学性能。结构面材料的宏观力学性能的变形劣化是结构变形增加和稳定性降低的主要因素。因此,用宏观方法来分析和模拟岩石类材料的弹脆塑性软化本构特征,对目前的岩石(体)结构力学行为的工程分析与计算有着重要的意义。

## 参 考 文 献

- 1 Bazant Z P. Microplane model for brittle-plastic material; 1. Theory J Engrg Mech. 1988, 14(10): 1 672~1 702
- 2 Bazant Z P, Gambarova P G. Crack shear in concrete; crack band and microplane model. J Struct Engrg, ASCE, 1984, 110(9): 2 015~2 035
- 3 Bazant Z P, Kim J K. Creep of anisotropic clay; microplane model. J Geotech Engrg, ASCE, 1986, 112(4): 458~475
- 4 Bazant Z P, Prat P C. Microplane model for brittle-plastic material; 2. Verification. J Engrg Mech, ASCE, 1988, 114(10): 1 689~1 702
- 5 Zubelewicz A, Bazant Z P. Interface element modelling of fracture in aggregate composites. J Engrg Mech, ASCE, 1987, 113(11): 1 619~1 630
- 6 Chen W F. Evaluation of plasticity-based constitutive models for concrete materials. Solid Mech Arch, 1988, 13(1): 1~63
- 7 Chen C T, Chew W F. Concrete in biaxial cyclic compression. J Struct Engrg, ASCE, 1975, 101(4): 461~476
- 8 Zubelewicz A, Bazant Z P. Constitutive model with rotating active plane and true stress. J Engrg Mech, ASCE, 1987, 113(3): 398~416
- 9 Gerstle K H. Simple formulation of biaxial concrete behaviour. J Am Concr Inst, 1981, 78(1): 62~68
- 10 Krajcinovic D, Fonseka G V. The continuous damage theory of brittle materials, Part I: General theory. J Appl Mech Trans, 1981, 48(4): 809~815
- 11 Dougill J W. On stable progressively fracturing solids. J Appl Math Phys (ZAMP). 1976, 27: 423~436
- 12 Bazant Z P, Kim S. Plastic-fracturing theory for concrete. J Engrg Mech, ASCE, 1979, 105(3): 407~428
- 13 Bazant Z P, Shieh C L. Hysteretic fracturing endochronic theory for concrete. J Engrg Mech, ASCE, 1980, 106(6): 926~950
- 14 Ortiz M A. A constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete. Mech Mater, 1985, 4: 67~93
- 15 Dems K, Mroz Z. Stability condition for brittle plastic structure with propagation damage surface. J Struct Mech, 1985, 13(1): 85~122

- 16 徐秉业. 塑性力学. 北京: 高等教育出版社, 1988
- 17 Owen D R J, Hinton E. Finite element in plasticity: theory and practice. Pineridge Press Limited, Swansea, U K, 1980
- 18 沈新普. 岩土工程弹脆塑性数值研究及材料参数识别反演方法: [学位论文]. 北京: 清华大学工程力学系, 1993

## **The characteristics of elasto-brittle-plastic softening constitutive theory and its numerical calculation**

Shen Xinpu, Cen Zhangzhi, Xu Bingye

Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University

**Abstract:** For large-scale complicated rockmass, the strain-degradation of its macroscopic mechanical properties is one of the principal factor for the increasing of deformation values. In this paper, it is assumed that the strain softening is isotropic during the stress-drop taking place. The numerical scheme for elasto-brittle-plastic constitutive integration and corresponding incremental finite element solution scheme have been proposed. Compared with the corresponding analytical solution of a typical structure, the accuracy of the numerical results obtained in this paper is satisfactory. It is appeared that the numerical integration scheme is reasonable. The computational program designed here is suitable for the mechanical analysis of the elasto-brittle-plastic structure.

**Key words:** elasto-brittle-plasticity; constitutive integration; stress-drop; strain-softening