

文章编号:1000-0887(2005)02-0201-14

# 梯度增强的弹塑性损伤非局部本构模型研究\*

沈新普<sup>1</sup>, 沈国晓<sup>2</sup>, 陈立新<sup>3</sup>, 杨璐<sup>1</sup>

(1. 沈阳工业大学 建筑工程学院, 沈阳 110023;

2. 太原重型机械学院 应用科学系, 太原 030024;

3. 东北煤田地质局 煤层甲烷气开发中心, 沈阳 110035)

(我刊原编委杨桂通推荐)

**摘要:** 简要介绍了几种主要的梯度增强非局部模型. 基于“能量耗散梯度依赖”原则,在连续介质热力学框架内推导了梯度增强损伤与塑性耦合的本构关系,同时给出了一个基于塑性的损伤模型的梯度依赖本构的具体形式. 在数值计算方面,结合移动最小二乘法 and 泰勒级数展开方法,建立了损伤场(有限元高斯积分点上)的 Laplace 值的近似求解格式,分别给出了二维和三维情况下的相关公式. 给出的二维的韧性断裂的梯度依赖损伤塑性的数值应用,表明了格式的有效性和实用性. 还讨论了内部长度的意义及取值问题.

**关键词:** 损伤; 塑性; 非局部; 本构模型; 梯度增强

**中图分类号:** O342 **文献标识码:** A

## 引言

在经典塑性理论中,材料的非稳定性是引起应变局部化现象的主要原因. 近年来的研究表明,初始缺陷及特定的边界条件有时会导致加载状态下的试样中产生非均匀、非连续的应力状态. 尤其是在结构的渐进破坏过程中,初始缺陷及其引起的局部应力集中会导致强烈的非均匀变形<sup>[1,2]</sup>. 而当把断裂/损伤因素考虑进塑性计算时,材料和结构的行为将比软化塑性时的行为复杂得多. 这是因为在这种情况下,相邻的裂纹间的相互影响也不能忽略. 因此,当裂纹产生以后,材料的行为特性将不再是各向同性的,亦即变成了‘非均匀材料’,或称‘非简单材料’(如 Noll<sup>[3]</sup>给的定义). 对于非简单材料,Noll<sup>[3]</sup>认为,其材料的力学行为特性是‘高阶变形梯度依赖的’. 这一观点目前已被广泛接受.

梯度增强的本构模型是处理非简单材料塑性/损伤分析时常用的一类方法. 本研究的目的是针对金属成型过程中的塑性与断裂现象,建立梯度增强的非局部损伤塑性本构模型. 理论上讲,这一模型能够用于预测计算金属部件的最大可加工性,以及进行新的零件加工过程的优化设计.

\* 收稿日期: 2003-01-09; 修订日期: 2004-07-19

基金项目: 辽宁省自然科学基金资助项目(2001101023)

作者简介: 沈新普(1963—),男,河北清河人,教授,博士(联系人. Tel: +86-24-23915126; Fax: +86-24-23906300; E-mail: xinpushen@vip.sina.com).

由于通过有限元计算得到的损伤场是离散分布的,无法解析地求得损伤场的梯度场,从而也就无法解析地求得各点损伤场的 Laplace 值。已有的文献中处理这类离散点的梯度值求解问题的方法是将损伤的 Laplace 项作为节点自由度,求解扩展的有限元问题(如 Nedjar[4]等),但这样做需要很大的附加工作量。本文将研究使用移动最小二乘法(MLS)并结合泰勒级数展开方法,来建立损伤场(有限元高斯积分点上)的 Laplace 值的近似求解公式。

移动最小二乘法(MLS)是这样一种最小二乘法:它的计算式中的系数是坐标的函数,从而依赖于兴趣点的坐标。MLS 最初是为了求解优化问题中散点值的梯度场问题<sup>[5,6]</sup>而提出的。这一方法后来被用于各种用途,比如建立新型无网格法就用到了它(参见文献[1],[7],[8])。

为了使得本文具有较好的可读性,在以下的第 1 节中,将给出部分典型已有相关模型的简要介绍。在第 2 节中将结合积分形式的 Clausius-Duhem 不等式,给出本文模型的连续介质热力学推导。在第 3 节中给出局部意义上的塑性损伤模型的具体形式。第 4 节将分别给出二维和三维情况下数值求解损伤场的 Laplace 值的相关公式。第 5 节则将给出二维的韧性断裂的梯度依赖损伤塑性的数值应用。

## 1 已有相关模型简要介绍

### 1.1 Aifantis 的梯度增强的非局部塑性模型

Aifantis 提出的梯度依赖塑性本构模型<sup>[9]</sup>的特点是在塑性加载条件中引入了等效塑性应变的 Laplace 项,同时引入了相应的参数  $c$ ,其形式为:

$$f^p = \bar{\sigma} - [s(\bar{\epsilon}^p) - c \nabla^2 \bar{\epsilon}^p] \leq 0, \quad (1)$$

式中的  $\bar{\sigma}$  为等效应力,  $\bar{\epsilon}^p$  为等效塑性应变,  $s(\bar{\epsilon}^p)$  为塑性屈服极限。当用于硬化材料时为  $\bar{\epsilon}^p$  的函数,  $c = c(\bar{\epsilon}^p)$  为 Laplace 项的系数,  $\bar{\epsilon}^p$  的 Laplace 项的引入是为了在计算中计入邻域点上的位错运动的影响。

以式(1)为特征的梯度增强的非局部塑性本构模型,能较好地模拟应变软化引起的局部化现象,并得到了广泛应用<sup>[10,11]</sup>。

### 1.2 Nedjar 梯度依赖非局部损伤模型

Nedjar<sup>[4]</sup>定义的损伤变量为  $(x, t)$ , 并设定当其值为 1 时材料处于完好状态,当其值为 0 时材料处于完全断裂状态。在计算损伤演化时记入损伤梯度的影响,从而也就记入了邻点的损伤值对该点损伤演化的影响。Nedjar 模型的特点是将损伤梯度作为新的内变量纳入计算,损伤梯度有自己的演化律。从而,理论上讲,也就有自己的能量耗散机制。Nedjar<sup>[4]</sup>模型的平衡方程为:

$$\text{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{在域 } \Omega \text{ 内}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}, \quad \text{在边界 } \partial \Omega \text{ 上}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} c \dot{\epsilon} - k \dot{\epsilon} + \partial L(\dot{\epsilon}) = W - \eta S(\dot{\epsilon}), & \text{在域 } \Omega \text{ 内}; \\ k(\partial / \partial n) = 0, & \text{在边界 } \partial \Omega \text{ 上}, \end{cases} \quad (3)$$

上式中  $\nabla^2$  为 Laplace 算子,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}$  为其应力应变关系。式(2)为经典形式的平衡方程,而式(3)则是损伤演化方程,  $\dot{\epsilon}$  就是从中求得的。注意到式(3)与经典的热传导方程的形式相同,因此其求解可完全借鉴热传导方程的求解方法。

由于 Nedjar 模型引入了另外的内变量演化律,因此其计算也就更加复杂,文献[4]给出的结果表示该模型的损伤局部化程度不高,不象试验结果中那么明显。

### 1.3 Liebe-Steinmann-Benallal 梯度依赖非局部损伤模型

Liebe, Steinmann 和 Benallal<sup>[12]</sup>提出的梯度依赖模型是基于能量耗散非局部化的。在这一

模型中,其 Helmholtz 自由能的表达式分为两部分:

$$\psi = \psi(D, \epsilon, g) = \psi(D, \epsilon) + \psi(g), \quad (4)$$

式中  $\psi(D, \epsilon)$  为普通的 Helmholtz 自由能,它取决于标量损伤变量  $D$  和应变张量  $\epsilon$ ,第二项  $\psi(g)$  梯度项对应的 Helmholtz 自由能,它取决于损伤的梯度值,即  $g = \nabla D$ . 该模型还采用了 Lemaitre 的应变等效原理<sup>[13]</sup>进行有效空间的塑性计算.

梯度增强后的损伤共轭力为:

$$\bar{Y}(D, g) = - \frac{\partial \psi}{\partial D} = Y - \nabla \cdot \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla D)} = Y - c \nabla^2 D, \quad (5)$$

式中  $\bar{Y}$  被文献[12]定义为一个特定的导数运算,下面介绍了这个运算.

在文献[12]中,给定物质点上的能量耗散率  $\dot{\psi}$  为:

$$\dot{\psi} = Y\dot{D} + G \cdot \dot{g} + P = 0, \quad (6)$$

式中  $G$  为梯度项的热力学共轭力,  $P$  为非均匀材料的非局部残余项(参见文献[14]).

在文献[12]中引入了非局部损伤共轭力  $\bar{Y}$  的说法,  $\bar{Y}$  的定义式为:

$$\dot{\psi} = \bar{Y}\dot{D} = 0. \quad (7)$$

将式(7)与式(6)比较,可以得出:

$$P = \bar{Y}\dot{D} - (Y\dot{D} + G \cdot \dot{g}), \quad (8)$$

式中  $P$  即为邻点的力学量对该点的能量耗散的影响.

Maugin<sup>[14]</sup>提出,  $P$  在表示体元上的积分应等于零,即:

$$\int_{V^*} P dV = 0, \quad (9)$$

式中  $V^*$  是表示体元.

将式(8)代入式(9),并由 Gauss 积分定理得:

$$\int_{V^*} P dV = \int_{V^*} [(\bar{Y} - Y + \nabla \cdot G) \dot{D}] dV + \int_{\partial V^*} n \cdot G dA = 0, \quad (10)$$

式中  $n$  为边界  $\partial V^*$  的外法线方向. 由式(10)可得出上述的特定的导数运算  $\bar{Y} / D$  的表达式,为:

$$\bar{Y} = Y - \nabla \cdot G, \quad \text{在 } V^* \text{ 域内}, \quad (11)$$

在边界上有:

$$n \cdot G = 0, \quad \text{在边界 } \partial V^* \text{ 上}, \quad (12)$$

从而进一步得出:

$$\bar{Y}(D, g) = Y - c \nabla^2 D, \quad (13)$$

$$n \cdot \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla D)} = 0, \quad \text{在边界 } \partial V^* \text{ 上}. \quad (14)$$

上述过程虽然是精心设计的,但是数学上仍然有漏洞,本文第3节的模型将给出独立的数学过程.

## 2 梯度增强的损伤塑性耦合本构关系

### 2.1 梯度增强损伤塑性的连续介质热力学

本文采用了 Hansen 和 Schreyer<sup>[15]</sup>的连续介质力学描述为基本框架,描述梯度增强的及局部意义上的弹塑性损伤耦合本构模型. 模型的前提条件为:1) 纯机械作用;2) 小变形. 给定坐标为  $x$  的点上的单位质量的内能的函数形式为:

$$u = u[s(x), \epsilon(x), i(x)], \quad (15)$$

式中  $\dot{s}$  及  $s$  分别代表应变张量和熵增;  $i$  为内变量集合. 率形式的能量平衡关系为:

$$\dot{u} = \dots \quad (16)$$

局部意义的 Clausius-Duhem 不等式的表达式为:

$$\rho \dot{u}(s, \dots, i) + \rho \dot{s} \leq 0, \quad (17)$$

式中  $\rho$  表示材料密度,  $T$  为绝对温度,  $\dot{s}$  为不可逆的熵增.

将上式在全域积分可得整体  $\Omega$  上的即非局部的 Clausius-Duhem 不等式:

$$\int_{\Omega} [\rho \dot{u}(s, \dots, i) + \rho \dot{s}] d\Omega \leq 0. \quad (18)$$

将式(15)的内能  $u$  的全微分代入式(18)可得:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \rho - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \dot{T} + \left( \rho \dot{s} - \frac{\partial u}{\partial s} \right) \dot{s} - \frac{\partial u}{\partial i} \dot{i} \right] d\Omega \leq 0. \quad (19)$$

## 2.2 梯度增强的损伤模型

在本文模型中采用了 3 个内变量: 塑性应变张量  $\mathbf{p}$ , 各向同性标量损伤  $D$ , 损伤梯度  $\nabla D$ . 将损伤梯度  $\nabla D$  视为独立内变量的原因是:  $\nabla D$  不仅仅由某个点的局部损伤值  $D$  确定, 而且还取决于其邻近各点的损伤值. 因此,  $\nabla D$  虽然与局部损伤值  $D$  有关, 但是又不是完全取决于局部损伤值  $D$ . 将这 3 个内变量代入式(19)可得:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \rho - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \dot{T} + \left( \rho \dot{s} - \frac{\partial u}{\partial s} \right) \dot{s} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} - \frac{\partial u}{\partial D} \dot{D} - \frac{\partial u}{\partial(\nabla D)} \cdot (\nabla \dot{D}) \right] d\Omega \leq 0. \quad (20)$$

在小变形假设下, 有以下的关系式成立:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \mathbf{e} + \mathbf{p}, & \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{p}}, \\ u = u + s, & \partial u / \partial \mathbf{e} = \partial u / \partial \mathbf{e} + \partial u / \partial \mathbf{p}, \end{cases} \quad (21)$$

式中  $u$  为 Helmholtz 自由能函数. 式(20)可进一步写为:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \rho - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \dot{T} + \left( \rho \dot{s} + \frac{\partial u}{\partial s} \dot{\mathbf{p}} - \frac{\partial u}{\partial D} \dot{D} - \frac{\partial u}{\partial(\nabla D)} \cdot (\nabla \dot{D}) \right) \right] d\Omega \leq 0. \quad (22)$$

下面本文给出了损伤共轭力表示式, 并参照损伤共轭力的定义给出了损伤梯度的热力学共轭力的定义, 分别为:

$$Y = - \frac{\partial u}{\partial D}, \quad Y^{(\nabla D)} = - \frac{\partial u}{\partial(\nabla D)}. \quad (23)$$

从而可得如下形式的非局部 Clausius-Duhem 不等式:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \rho - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \dot{T} + \left( \rho \dot{s} + \frac{\partial u}{\partial s} \dot{\mathbf{p}} - Y \dot{D} - Y^{(\nabla D)} \cdot (\nabla \dot{D}) \right) \right] d\Omega \leq 0. \quad (24)$$

对式(24)中的梯度项进行分部积分后可得:

$$Y^{(\nabla D)} \cdot (\nabla \dot{D}) d\Omega = \left( \iint_{\Omega} [(\dot{D} \mathbf{n}) \cdot Y^{(\nabla D)}] d(\partial \Omega) - \dot{D} \int_{\Omega} \nabla \cdot Y^{(\nabla D)} d\Omega \right). \quad (25)$$

将式(25)代入式(24)可得:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \rho - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \dot{T} + \left( \rho \dot{s} + \frac{\partial u}{\partial s} \dot{\mathbf{p}} - \right. \right.$$

$$\left. \dot{D} (Y - \nabla \cdot Y^{(\nabla D)}) \right] d - \frac{1}{\partial} [(\dot{D}n) \cdot Y^{(\nabla D)}] d(\partial) = 0 \quad (26)$$

从式(26)可得下列关系式:

$$\begin{cases} = \frac{\partial u}{\partial}, & = \frac{\partial e}{\partial s}, & Y^{\text{nonlocal}} = Y - \nabla \cdot Y^{(\nabla D)}, & \text{在域内,} \\ (\dot{D}n) \cdot Y^{(\nabla D)} = 0, & & & \text{在边界 } \partial \text{ 上,} \end{cases} \quad (27)$$

式中  $n$  为  $\partial$  的外法向.

通常在本构模型的表达中采用热力学势函数,即应变自由能函数来表示:

$$= u - \vartheta s = (, \vartheta, i) \cdot \quad (28)$$

这样式(27)可进一步表示为:

$$\begin{cases} = \frac{\partial}{\partial}, & = \frac{\partial e}{\partial s}, & Y^{\text{nonlocal}} = Y - \nabla \cdot Y^{(\nabla D)}, & \text{在域内,} \\ (\dot{D}n) \cdot Y^{(\nabla D)} = 0, & & & \text{在边界 } \partial \text{ 上.} \end{cases} \quad (29)$$

本文设定梯度依赖损伤塑性-等温过程的自由能函数能表示为下列形式:

$$= \text{local}(D, ) + \text{grad}(\nabla D), \quad (30)$$

式中  $\text{grad}(\nabla D) = \frac{1}{2} (\nabla D) \cdot E^D \cdot (\nabla D), E^D = cI \cdot \quad (31)$

从而由式(30)可得:

$$Y = - \frac{\partial}{\partial D} = Y^0 - c \nabla D \cdot \frac{\partial(\nabla D)}{\partial D}, \quad (32)$$

$$Y^{(\nabla D)} = - \frac{\partial}{\partial(\nabla D)} = c \nabla D, \quad (33)$$

式中

$$Y^0 = - \frac{\partial \text{local}}{\partial D}. \quad (34)$$

进一步,结合式(26),可得梯度依赖的损伤热力学共轭力为:

$$Y^{\text{nonlocal}} = Y - \nabla \cdot Y^{(\nabla D)} = Y^0 - c \nabla D \cdot \frac{\partial(\nabla D)}{\partial D} - c \nabla^2 D. \quad (35)$$

与文献中的梯度依赖的损伤热力学共轭力表达式相比,本文结果中的表达式中有一个特殊项:

$$- c \nabla D \cdot \frac{\partial(\nabla D)}{\partial D}. \quad (36)$$

### 3 弹塑性损伤耦合本构模型的具体形式

#### 3.1 损伤材料有效应力/应变关系

本文采用了 Lemaitre<sup>[13]</sup>的各向同性标量损伤模型,同时采用了 Saanouni 等人<sup>[16]</sup>提出的“总能量等效假设”.含损伤材料有效应力/应变关系为:

$$\tilde{\sigma} = (1 - D) \sigma, \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{(1 - D)}, \quad (37)$$

式中上标符号  $\sim$  表示有效变量.另外,塑性应变硬化变量及其共轭力的表示式为:

$$\tilde{r} = (1 - D) r, \quad \tilde{R} = \frac{R}{(1 - D)}. \quad (38)$$

各个模量及其相伴的损伤关系为:

$$\tilde{E} = (1 - D)^2 E, \quad \tilde{Q} = (1 - D)^2 Q, \quad (39)$$

式中上标符号  $\sim$  表示含损伤的模量.

局部意义上的自由能表示式包括两部分:弹性应变自由能 $\psi^e$ 和塑性硬化相关的自由能 $\psi^r$ :

$$\psi^{\text{local}} = \psi^e + \psi^r. \quad (40)$$

这里采用了 Saanouni, Forster 和 Hatira<sup>[16]</sup>给出的自由能表示式:

$$\psi^{\text{local}} = \frac{1}{2} (\text{tr} \tilde{\epsilon})^2 + \mu (\tilde{\epsilon} : \tilde{\epsilon}) + \frac{1}{2} Q \tilde{r}^2, \quad (41)$$

式中 $\tilde{\epsilon}$ 和 $\mu$ 均为无损材料的Lame常数.从而可得线弹性应力应变关系为:

$$\sigma = \tilde{\epsilon} (\text{tr} \tilde{\epsilon}) \mathbf{I} + 2 \tilde{\mu} \tilde{\epsilon}, \quad (42)$$

式中 $\tilde{\epsilon}$ 和 $\tilde{\mu}$ 均为含损伤材料的Lame常数,且有:

$$\tilde{\epsilon} = (1 - D)^2 \epsilon, \quad \tilde{\mu} = (1 - D)^2 \mu. \quad (43)$$

进一步,可得相应的内变量的共轭力为:

$$R = \tilde{Q} r, \quad (44)$$

$$Y = (1 - D)^e E^e. \quad (45)$$

### 3.2 内变量演化律及加载条件

金属成型的力学模拟大多采用“基于塑性的损伤模型”来表述金属韧性断裂现象<sup>[16~19]</sup>.本文采用了文献[16]提出的,并经文献[20]改进的基于塑性的损伤演化律.损伤塑性加载条件为:

$$f^{pD} = J_2(\tilde{\epsilon}) - \tilde{R} - y = 0, \quad (46)$$

式中 $J_2$ 为应力偏量的第二不变量.

用于内变量演化的损伤塑性势的表达式为:

$$F^{pD} = f^p + \frac{1}{2} \frac{b}{Q} \tilde{R}^2 + \frac{S}{s+1} (1 - D)^\phi \left[ \frac{Y^{\text{nonlocal}}}{S} \right]^{s+1}, \quad (47)$$

式中参数 $a$ 、 $b$ 、 $s$ 、 $\phi$ 均为模型材料参数.

塑性应变的演化律为:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}^{pD} \frac{\partial F^{pD}}{\partial \tilde{\epsilon}} = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}^{pD} \frac{1}{(1 - D) J_2} \tilde{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{pD} \mathbf{N}, \quad (48)$$

式中

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{1}{(1 - D) J_2} \tilde{\epsilon}, \quad \dot{r} = \frac{\dot{\epsilon}^{pD}}{(1 - D)} (1 - b \tilde{r}), \quad (49)$$

式中 $\dot{\epsilon}^{pD}$ 为塑性乘子.损伤的演化律为:

$$\dot{D} = \dot{\epsilon}^{pD} \frac{\partial F^{pD}}{\partial Y^{\text{nonlocal}}} = \dot{\epsilon}^{pD} \left[ \frac{Y^{\text{nonlocal}}}{S} \right]^s (1 - D)^\phi. \quad (50)$$

应该说明的是,在基于塑性的损伤模型中,损伤的演化受塑性应变演化的控制.这时的损伤共轭力的作用实际上只是一个系数函数.与之相对,基于能量的损伤模型中的损伤共轭力是加载指标向量,控制着损伤演化.

## 4 用移动最小二乘法近似求解 Laplace 值的原理与格式

### 4.1 移动最小二乘法的数学原理

设定 $x$ 表示某一点的坐标矢量,则该点的损伤变量值 $D(x)$ 可近似表示为以下形式:

$$D(x) = p^T a, \quad (51)$$

式中矢量 $p$ 为一个多项式基向量,向量 $a$ 为一个依赖于坐标 $x$ 的系数向量.系数向量 $a$ 可利用移动最小二乘法的原理求得.具体为:建立局部区域内由各点损伤变量值的数值解 $\bar{D}_i$ 和

由式(51) 求得的解析解  $D(x_i)$  组成的目标函数:

$$J = \sum_{i=1}^n w(x - x_i) [p^T(x_i - x) a(x) - \bar{D}_i]^2, \tag{52}$$

式中  $w_i = w(x - x_i)$  为权函数,可以根据不同的问题,不同的需要具体给定;  $n$  是给定的局部区域内有限元高斯积分点的个数.

本文选定钟形函数为权函数.所谓钟形函数是指具有下述数学特性的一类函数:

$$w(0) = 1, w(0) = 0, w(1) = 0, w(1) = 0. \tag{53}$$

本文选定的钟形函数的具体形式为:

$$w(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 3\bar{d}^2 + 2\bar{d}^3, & \text{当 } \bar{d} < 1, \\ 0, & \text{当 } \bar{d} \geq 1, \end{cases} \tag{54}$$

式中  $\bar{d} = d/d_{\max}$ ,  $d_{\max}$  定义了局部兴趣区域的范围尺度,具有长度量纲,因此在这里被称为“内部长度”.

根据以上定义的权函数,可得相应的权函数矩阵:

$$W = \begin{bmatrix} w\left(\frac{x_1 - x}{d_{\max}}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w\left(\frac{x_2 - x}{d_{\max}}\right) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w\left(\frac{x_n - x}{d_{\max}}\right) \end{bmatrix}, \tag{55}$$

式中  $x_i - x = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]^{1/2}$ .

#### 4.2 向量 a 的计算

式(52)中的目标函数  $J$  的矢量形式为:

$$J = (P^T a - \bar{D})^T W (P^T a - \bar{D}), \tag{56}$$

式中  $P$  为由相关点的坐标值组成的矩阵,  $W$  是权函数矩阵,  $\bar{D}$  为已知的损伤场的数值解组成的矢量.

式(56)中的目标函数  $J$  最小化的条件方程为:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 2(P^T a - \bar{D})^T W P^T = 0. \tag{57}$$

从而可得:

$$a = [(PWP^T)^{-1} P W] \bar{D}. \tag{58}$$

#### 4.3 二维问题的基向量 p

二维问题的损伤场  $D(x)$  的泰勒级数展开式的二次近似式为:

$$D(x) = D(x_0) + \frac{\partial D(x)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial D(x)}{\partial y} (y - y_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 D(x)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 D(x)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 D(x)}{\partial y^2} (y - y_0)^2. \tag{59}$$

选定相应的多项式基向量  $p$  为:

$$p^T = \left\{ 1 \quad \tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \frac{1}{2} \tilde{x}^2 \quad \tilde{x}\tilde{y} \quad \frac{1}{2} \tilde{y}^2 \right\}, \tag{60}$$

式中  $\tilde{x} = x_i - x$ ,  $\tilde{y} = y_i - y$ ,  $i = 1, \dots, n$ . 从而可得相应的矩阵  $P$  为:

$$P^T = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & x_1 - x & y_1 - y & \frac{1}{2}(x_1 - x)^2 & (x_1 - x)(y_1 - y) & \frac{1}{2}(y_1 - y)^2 \\ 1 & x_2 - x & y_2 - y & \frac{1}{2}(x_2 - x)^2 & (x_2 - x)(y_2 - y) & \frac{1}{2}(y_2 - y)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x & y_n - y & \frac{1}{2}(x_n - x)^2 & (x_n - x)(y_n - y) & \frac{1}{2}(y_n - y)^2 \end{array} \right\}; \quad (61)$$

权系数矩阵  $W$  为:

$$W = \begin{bmatrix} w(x_1 - x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(x_2 - x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w(x_n - x) \end{bmatrix}; \quad (62)$$

矢量  $\bar{D}$  为:

$$\bar{D}^T = \{ D_1 \quad D_2 \quad \dots \quad D_n \}; \quad (63)$$

矢量  $a$  为:

$$a^T = \{ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \}. \quad (64)$$

综合以上可以得出系数矢量  $a$  的元素与损伤场的 Laplace 运算的元素的对应关系为:

$$\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x^2} = a_4, \quad \frac{\partial^2 D(x)}{\partial y^2} = a_6. \quad (65)$$

最后得点  $x$  上的损伤场的 Laplace 值为:

$$\nabla^2 D(x) = a_4 + a_6. \quad (66)$$

#### 4.4 三维问题的多项式基矢量 $p$

对于三维问题的损伤场  $D(x)$ , 相应的泰勒级数展开式的二次近似式的多项式基向量  $p$  选定为:

$$p^T = \left\{ 1 \quad \tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \tilde{z} \quad \tilde{xy} \quad \tilde{xz} \quad \tilde{yz} \quad \frac{1}{2}\tilde{x}^2 \quad \frac{1}{2}\tilde{y}^2 \quad \frac{1}{2}\tilde{z}^2 \right\}; \quad (67)$$

系数矢量  $a$  则为:

$$a^T = \{ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_7 \quad a_9 \quad a_{10} \}. \quad (68)$$

从而得三维问题的点  $x$  上的损伤场的 Laplace 值为:

$$\nabla^2 D(x) = a_8 + a_9 + a_{10}. \quad (69)$$

## 5 数值应用

上述求解损伤场的 Laplace 值的方法及本构模型, 已经植入了巴黎矿业学院材料中心的 ZeBuLon 程序, 该程序是一个面向对象(C++)大型有限元程序包. 本研究使用这个特别版的 ZeBuLon 程序进行了下述系列的数值试验: 双面预制缺口平面应变试件的拉伸试验, 以及平面应力金属板条的单向拉伸试验. 需要声明的是, 计算中, 在式(36)中所述的非局部损伤共轭力的几何项被取为零值.

### 5.1 双面预制缺口平面应变试件的拉伸试验

为了检验算法的有效性, 本文首先计算了如图 1 所示的试件的塑性损伤行为. 图中的平面应变状态下的双面预制缺口试件受竖直方向的单向拉伸, 发生弹塑性损伤行为. 为了检验数值结果的网格依赖性, 本文采用了两种网格. 在网格 1 中, 采用了 370 个二维 8 节点等参元以及 1 217 个节点.



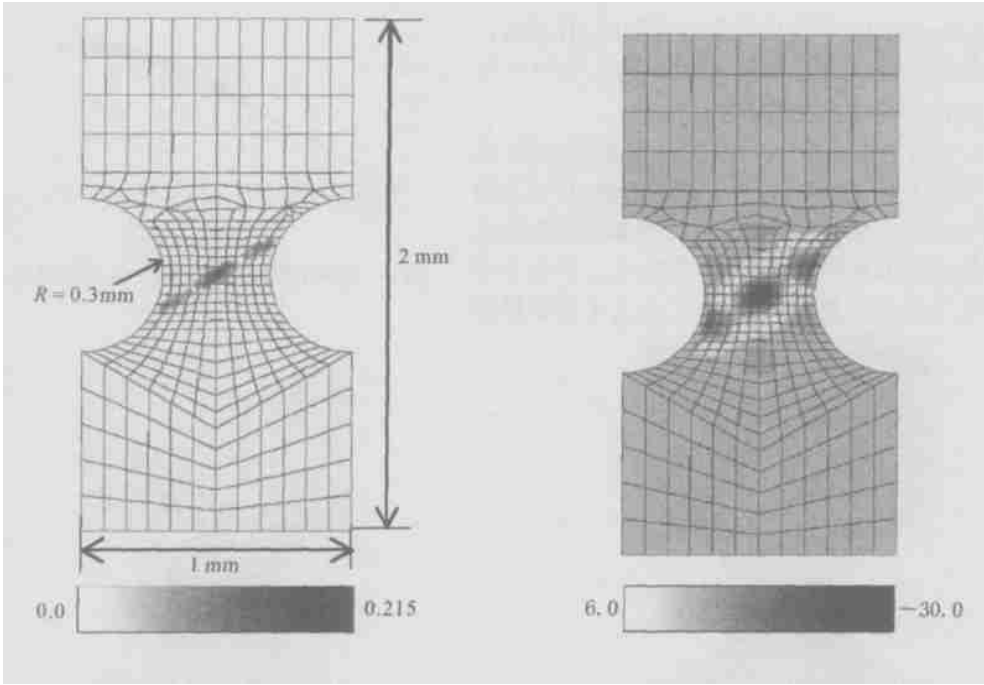


图1 损伤场的分布图

图2 损伤场的Laplace 值分布图

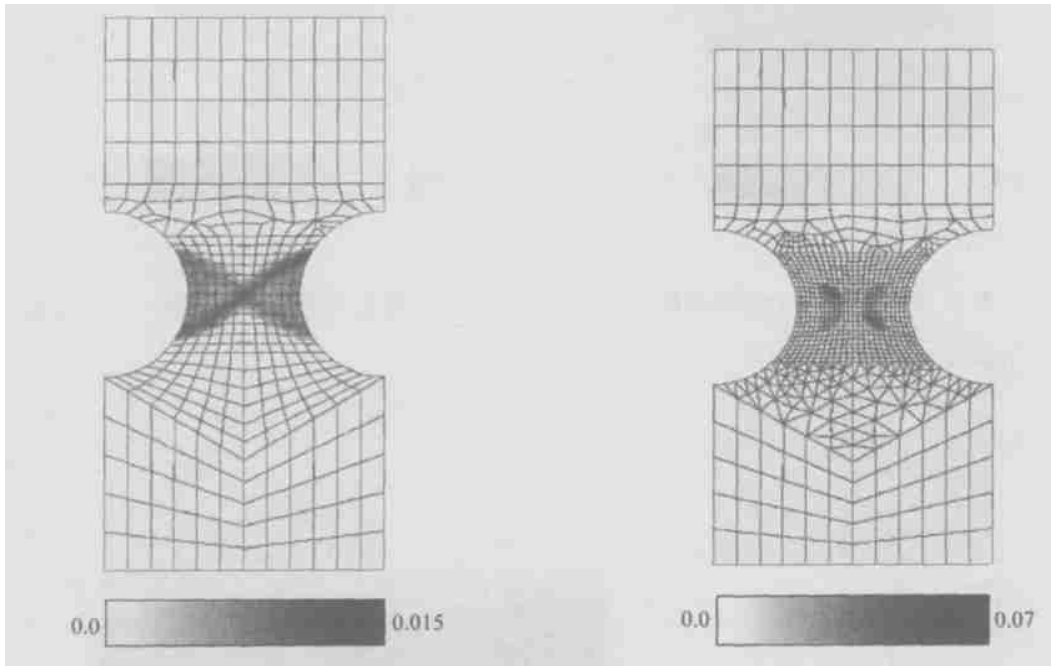


图3 等效塑性应变场的分布情况

图4 损伤分布图

经过若干试算之后确定采用的材料参数为:弹性模量为  $E = 200\ 000 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 初始屈服极限及硬化参数取值分别为  $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$ ,  $Q = 1\ 000 \text{ MPa}$ ,  $b = 5$ ,  $S = 1$ ,  $s = 1$ , 断裂时数值上的损伤极限为  $D_c = 0.999$ , 非局部项的系数为  $c = -2$ ,  $d_{\max} = 0.15$ .

由上述参数得到的数值结果显示如下:图1给出了损伤场的分布情况,图2给出了损伤场的Laplace值的分布情况,图3给出了等效塑性应变场的分布情况.以上图形表明,本文提出

的 Laplace 值的近似数值算法是合理的、有效的。本文的非局部项的系数参数是合适的,得出的局部化剪切带的位置和形状合理。

应该注意的是非局部项的系数参数选择:参数  $c$  实际上是一个“梯度项影响”参数,对该参数的选择依据主要是“模拟现象”,即参照实验数据或塑性损伤的理论解来确定;参数  $d_{max}$  应该参照局部化带的宽度确定,它实际上定义了影响局部

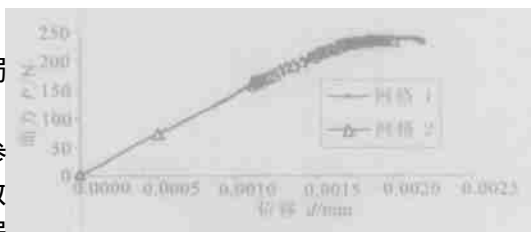


图 5 两种不同网格对应的位移-力曲线

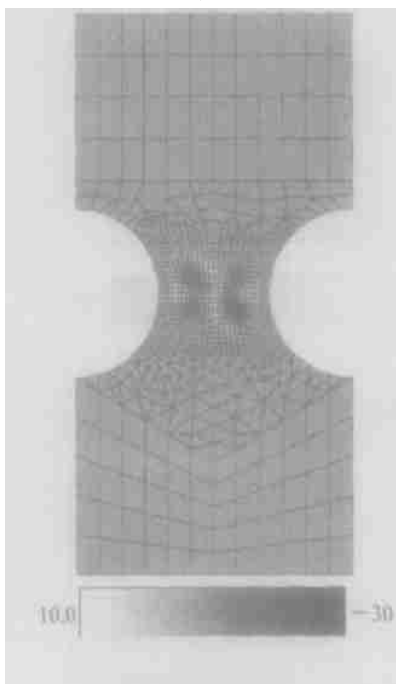


图 6 损伤场的 Laplace 值的分布

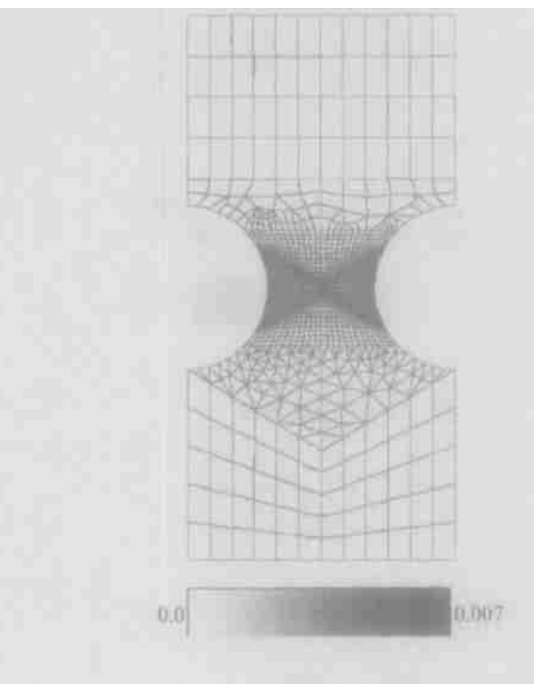


图 7 等效塑性应变分布

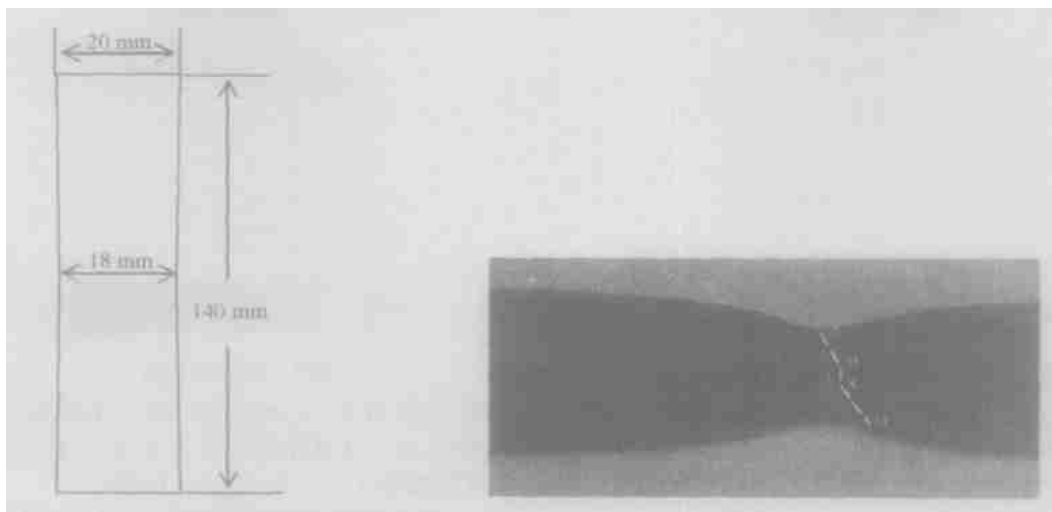


图 8 试件的几何尺寸

图 9 金属板条塑性损伤变形的实验结果<sup>[21]</sup>

化的范围尺度。另外,当计算条件有限时,它的取值应该覆盖足够多的高斯点,以保证近似计算公式中的系数矩阵不会发生奇异性,从而可见  $d_{max}$  取值直接与有限元网格划分相连。

另外,从数学上讲,边界点上的 Laplace 值的计算中会有“边缘效应”:由于边界点只有一侧有参考点,而 Laplace 值的计算需要两侧的点的贡献。采用本文的由移动最小二乘法得来的算法则不会有这个问题,只要  $d_{max}$  取值时覆盖足够多的点就可以了。

进一步细化了的网格(网格 2)采用了 2 733 个节点和 763 个 8-节点等参元,以及 154 个 6-节点三角形

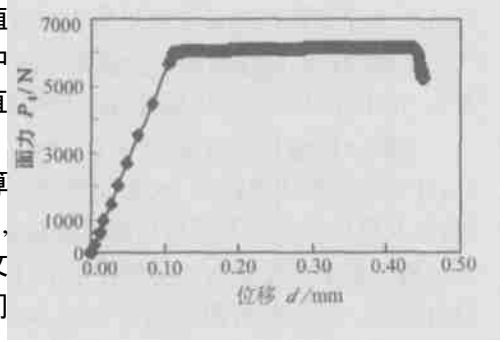
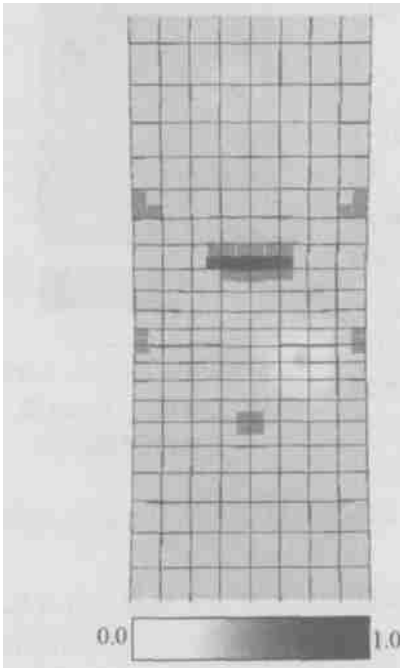
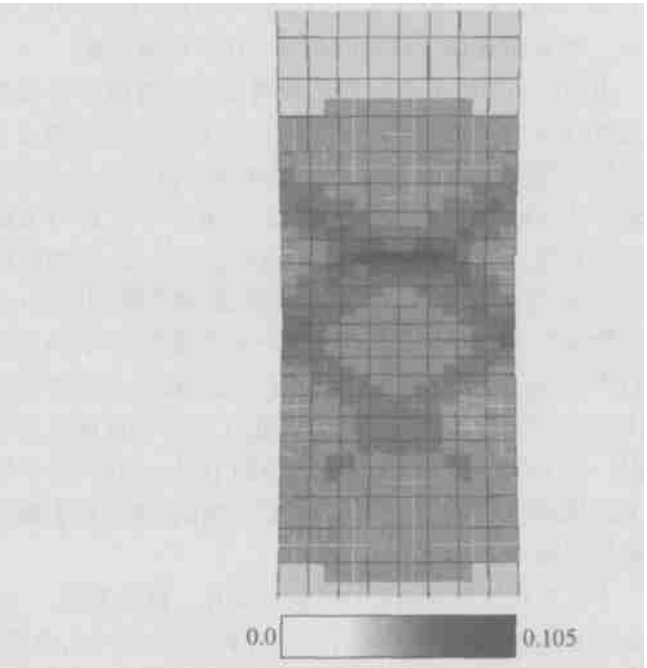


图 10 金属板条韧性断裂面力-位移曲线 (c = - 500, Q = 800, b = 5.95)



(c = - 500, Q = 800, b = 5.95)

图 11 损伤分布图(局部放大)



(c = - 500, Q = 800, b = 5.95)

图 12 等效塑性应变分布图(局部放大)

等参元。由于网格细化以后高斯积分点大幅增加,为减小计算量,内部长度取值减小,改为  $d_{max} = 0.1$ , 采用的其它材料参数与前同。

在下面的图 4 和图 7 中,可以看到网格细分之后的损伤分布和等效塑性应变分布状况。尽管存在有两条剪切带,但有一条占优势的剪切带,而这条剪切带决定着结构的承载能力。网格细分之后的剪切带宽度角支较粗网格的情况有所减小。图 6 给出了损伤场的 Laplace 值的分布。图 5 给出了两种不同网格对应的位移-面力曲线,从图中看出,网格 2 的结构响应在峰值后区的表现较网格 1 的要脆。

### 5.2 金属板条的塑性损伤数值模拟

文献[21]给出了单向拉伸荷载下,金属板条塑性损伤变形的实验结果。Brunet 等人<sup>[21]</sup>使用的金属是钛合金。试件的几何尺寸为  $140 \times 20 \times 2 \text{ mm}^3$ ,如图 8 所示。材料参数为:初始屈服极限  $\sigma_s^0 = 329 \text{ MPa}$ ,无限大塑性应变对应的硬化极限为  $Q = 281 \text{ MPa}$ ,塑性硬化参数  $b =$

5.95. 为了使损伤局部化区域集中在板条中部,计算中给定板条中部宽度略窄于两端.

文献[21]的韧性断裂实验结果如图9所示,图中虚线 $ABCD$ 标出了断裂裂纹的发生位置,其中 $AB$ 段和 $CD$ 为剪切裂纹, $BC$ 则明显为拉伸断裂裂纹.

文献[21]给出的实验结果的位移-面力曲线包括有3部分:开始阶段的线弹性部分,稳定塑性硬化变形阶段的平台部分,以及最后的变形及损伤局部化阶段的软化部分.

由于板条的厚度与宽度相比很小,因此这属于典型的平面应力问题.采用的有限元网格包括640个二维8-节点等参元和2033个节点.经过一系列试算后采用的材料参数和非局部项参数的取值为: $c = -500.0$ ,  $d_{\max} = 5.0$  mm,  $E = 200\,000$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_s = 329$  MPa,  $Q = 800$  MPa,  $b = 5.95$ ,  $S = 1$ ,  $s = 1$ ,  $D_c = 0.999$ .根据试件的几何尺寸和有限元网格,内部尺寸 $d_{\max}$ 的取值在前述算例的基础上作了合理调整.

下面的图中给出了梯度依赖塑性损伤数值计算结果.图10给出了面力-位移曲线,可以看出,曲线由3部分组成,即:开始阶段的线弹性部分,稳定塑性硬化变形阶段的平台部分,以及最后的变形及损伤局部化阶段的软化部分.这与文献报道的现象相符.图11显示了损伤局部化的位置,即韧性断裂裂纹的位置:中心明显为拉伸断裂裂纹,两侧为剪切裂纹(尚处于发展阶段).图11中的剪切裂纹还没有完全形成,而这时的结构行为已经呈现失稳状态(如跃返失稳),致使本计算受技术限制无法进一步进行下去.图12给出了等效塑性应变的局部化情况.图13给出了试件中损伤场的Laplace值的分布情况.

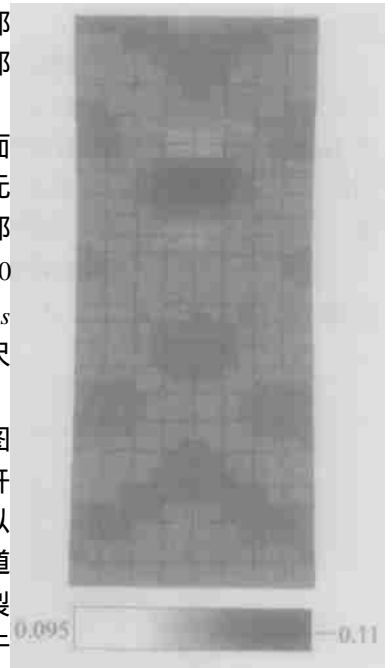
以上结果表明本文选取的参数值是合适的,同时还表明本文模型能够有效模拟金属板条的拉伸断裂问题.

本文还对三维问题进行了初步试算.结果表明,三维问题的梯度依赖塑性损伤计算比二维更为复杂:当试件在一个方向的几何尺寸过小时,其产生的损伤梯度可能会太大,从而引起过大的梯度效应.这表明对三维问题的损伤梯度依赖计算,还需要做进一步的工作.

## 6 结束语

基于“能量耗散梯度依赖”原则,本文在连续介质热力学框架内推导了梯度增强损伤与塑性耦合的本构关系,同时给出了一个基于塑性的损伤模型的梯度依赖本构的具体形式.与已有的文献相比,本文从积分形式的非局部 Clausius-Duhem 不等式出发,过程严密,数学上更合理.本文的结果中的非局部损伤共轭力的表达式中含有几何相关项,这是其他模型中所没有的.本文认为,该项可能具有反映“尺寸效应”的特性,同时消除数值结果的网格依赖现象.而这一点有待进一步的数值研究工作.

本文结合移动最小二乘法 and 泰勒级数展开方法,建立了损伤场(有限元高斯积分点上)的Laplace值的近似求解格式,分别给出了二维和三维情况下的相关公式.给出的二维的韧性断裂的梯度依赖损伤塑性的数值应用表明了本文格式的有效性和实用性.文中讨论了内部长度的意义及取值问题,认为应该根据试件的几何尺寸和计算的有限元网格情况来综合确定其值.



( $c = -500$ ,  $Q = 800$ ,  $b = 5.95$ )

图13 损伤场的Laplace值分布图(局部放大)

**致谢** 感谢法国特鲁瓦技术大学(UTT)的 Khemais Saanouni 教授在 2001 年 9 月—2002 年 8 月,本文第一作者在特鲁瓦技术大学机械系从事博士后研究期间所提供的支持和热情帮助。同时感谢 Jean-Luis Chaboche 教授的指点和帮助。

感谢巴黎矿业学院材料中心 Jacques Besson 教授在 2002 年 5 月—8 月,本文第一作者在巴黎矿业学院访问期间所提供的支持和热情帮助。

感谢法国贡比涅技术大学(UTC)数学系的 Pierre Villon 教授给本文第一作者讲授的关于移动最小二乘法的特别讲座。

### [参 考 文 献]

- [1] Belytschko T, Chiang H Y, Plaskacz E. High resolution two-dimensional shear band computations: imperfections and mesh dependence[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1994, **137**(1): 1—15.
- [2] Besson J, Steglich D, Brocks W. Modeling of crack growth in round bars and plane strain specimens [J]. *Internat J Solids and Structures*, 2001, **38**(11): 8259—8284.
- [3] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1967, **27**(1): 1—32.
- [4] Nedjar B. Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects [J]. *Internat J Solids and Structures*, 2001, **38**(9): 5412—5451.
- [5] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements [J]. *Comput Mech*, 1992, **10**(3): 519—534.
- [6] Villon P. Contribution à l'optimisation [D]. Thèse Présentée Pour L'obtention du Grade de Docteur D'État. France: Université de Technologie de Compiègne, 1991.
- [7] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: an overview and recent developments [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, **139**(1): 3—47.
- [8] Liu W K, Li S, Belytschko T. Moving least square kernel Galerkin method—( ): Methodology and convergence [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1997, **143**(1): 113—154.
- [9] Aifantis E C. On the role of gradient in the localization of deformation and fracture [J]. *Internat J Engrg Sci*, 1992, **30**(4): 1279—1299.
- [10] Comi C, Perego U. A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity [J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1996, **39**(6): 3731—3755.
- [11] Li X, Cescotto S. A mixed element method in gradient plasticity for pressure dependent materials and modelling of strain localization [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1997, **144**(1): 287—305.
- [12] Liebe T, Steinmann P, Benallal A. Theoretical and computational aspects of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2001, **190**(11): 6555—6576.
- [13] Lemaitre J. *A Course on Damage Mechanics* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [14] Maugin G A. Remarks on the thermomechanics of weakly nonlocal theories [A]. In: *Nonlocal Aspects in Solid Mechanics*, Abstracts of the EuroMech Colloquium 378 [C]. France: Mulhouse, 1998, 2—9.
- [15] Hansen N R, Schreyer H L. A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage [J]. *Internat J Solids Structures*, 1994, **31**(2): 359—389.
- [16] Saanouni K, Forster C, Hatira F B. On the anelastic flow with damage [J]. *Internat J Dama Mech*, 1994, **3**(1): 140—169.
- [17] Grange M, Besson J, Andrieu E. An anisotropic Gurson model to represent the ductile rupture of hydrided Zircaloy-4 sheets [J]. *Internat J Fracture*, 2000, **105**(1): 273—293.
- [18] Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth—Part : Yield cri-

- teria and flow rules for porous ductile media[J]. *J. Engng Mater Tech*, 1977, **99**(1) :2—15.
- [19] Kachanov L M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*[M]. the Netherlands :Maritinus Nijhoff Dordrecht, 1986.
- [20] 沈新普,沈国晓,陈立新. 用于应变局部化行为分析的弹塑性损伤耦合本构研究[J]. *应用数学和力学*, 2004, **25**(2) :1294—1256.
- [21] Brunet M, Morestin F, Walter H. Damage identification for anisotropic sheet-metals using a non-local damage model[A]. In: *Proceedings of 2002 ASME-IMECE*[C]. IMECE 2002—33088, Nov 17-22, 2002, New Orleans, 1—10.

## Investigation on Gradient-Dependent Nonlocal Constitutive Models for Elasto-Plasticity Coupled With Damage

SHEN Xin-pu<sup>1</sup>, SHEN Guo-xiao<sup>2</sup>, CHEN Li-xin<sup>3</sup>, YANG Lu<sup>1</sup>

- (1. College of Architectural Engineering, Shenyang University of Technology,  
Shenyang 110023, P. R. China;  
2. Department of Applied Sciences, Taiyuan Institute of Heavy Machine,  
Taiyuan 030024, P. R. China;  
3. Engng Center for Coal-Bedded Methane, Northeastern Bureau of Coal Geology,  
Shenyang 110035, P. R. China)

**Abstract:** Firstly, typical gradient-dependent nonlocal inelastic models were briefly reviewed. Secondly, based on the principle of 'gradient-dependent energy dissipation', a gradient-dependent constitutive model for plasticity coupled with isotropic damage was presented in the framework of continuum thermodynamics. Numerical scheme for calculation of Laplacian term of damage field with the numerical results obtained by FEM calculation was proposed. Equations have been presented on the basis of Taylor series for both 2-dimensional and 3-dimensional cases respectively. Numerical results have indicated the validity of the proposed gradient-dependent model and corresponding numerical scheme.

**Key words:** damage; plasticity; nonlocal; constitutive model; gradient-dependent