

文章编号:1000-0887(2000)11-1109-08

# 求解层间界面反平面剪切破坏的 剪切梁模型( )——失稳特性\*

沈新普<sup>1</sup>, 泽鲁·穆荣日<sup>2</sup>

(1. 东北大学 理学院 力学系, 沈阳 110006; 2. 波兰科学院 基础技术研究所, 华沙 波兰)

(吕和祥推荐)

**摘要:** 在研究( )的基础上,研究了剪切梁模型在裂纹萌生和失稳扩展阶段的行为特性,1)给出了软化失稳(snap-through)和回折失稳(snap-back)两种失稳行为发生的条件. 2)对剪切梁在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下的力学行为作了解析分析计算,给出了结构的位移—载荷全过程曲线. 3)讨论了失稳过程中的能量释放问题,并给出了回折失稳过程中结构对外界的能量释放的计算式.

**关键词:** 界面层; 反平面剪切; 破坏; 剪切梁; 失稳; 软化失稳; 回折失稳; 损伤

**中图分类号:** O342 **文献标识码:** A

## 引 言

在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下层间裂纹及其扩展所导致的层间失效,是复合材料、岩石等工程中重要的结构失效模式,有关层间裂纹的综述可见于 Garg<sup>[1]</sup>及 Hutchinson 和 Suo<sup>[2]</sup>等的文章,但是关于失稳阶段结构行为的研究成果并不多见. Yang 和 Ravi-Chandar<sup>[3]</sup>使用有限差分法研究了通过粘性层结合在一起的两个弹筒板,在反平面剪切载荷作用下的力学行为,给出了失稳阶段的初步研究结果,但是结果表现出的回折失稳过分强烈. 侧压力作用下的层间剪切失效的力学研究目前尚无文献报道.

本研究( )提出了能够反映上述层间界面断裂失效问题力学特性的剪切梁模型,研究了侧压力作用下反平面剪切单调载荷引起的层间裂纹的稳定扩展规律. 本文将在本研究( )部的基础上,使用剪切梁模型研究层间界面裂纹萌生阶段的行为特性和损伤区与自由端边界相互作用产生的失稳点的特性和失稳时平衡路径上的结构行为,给出软化失稳(snap-through)和回折失稳(snap-back)两种失稳行为发生的条件. 对通过粘性层结合在一起的两个弹性板,在反平面剪切载荷及侧压力共向作用下的力学行为进行解析分析计算,给出结构的位移—载荷全过程曲线,并着重分析结果中的回折失稳现象及失稳过程中的能量释放问题.

\* 收稿日期: 1999-08-08; 修订日期: 2000-09-20

基金项目: 欧盟资助课题(INCO-Copernicus, ERBIC 15 CT970706); 东北大学青年科学基金资助课题(856049)

作者简介: 沈新普(1963—),男,河北省清河县人,副教授,博士.

本文中的变量含义与在本研究( )中所做说明相同。

## 1 刚塑性本构模型下层间裂纹萌生阶段的解

当载荷开始加载到一定程度,界面层上损伤过程区开始萌生,并自边界  $x = 0$  处逐渐增长。这时有:

$$0 \leq x \leq S_2, \quad S_2 \leq x \leq S_d, \quad w(0) = w_c \cdot \quad (1)$$

对应损伤过程区  $0 \leq x \leq S_2$ , 应力和位移分布的解形式上与本研究第( )部中的式(28)相同,即:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(x) &= Gr_s [c_1 \sin(r_s x) - c_2 \cos(r_s x)], \\ w(x) &= c_1 \cos(r_s x) + c_2 \sin(r_s x) + f_c / K_s, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中

$$r_s = \sqrt{\frac{K_s}{G}}, \quad c_1 = \frac{f_c}{K_s} \cos(r_s S_2), \quad c_2 = \frac{f_c}{K_s} \sin(r_s S_2) \cdot \quad (3)$$

将式(2)中的  $w(x)$  代入本构方程(本研究( )中的式(26)) 即得  $f(x)$ , 但由于此时式(1)的限制,加载端的位移和力的表达式不能由式(3) 让  $x = 0$  求得,考虑式(1) 后求得的加载端的位移和力的表达式分别为:

$$w(0) = c_1 - f_c / K_s, \quad (0) = - Gr_s c_2 \cdot \quad (4)$$

## 2 尾区的解

现在来考察一下,当损伤过程区的前锋到达自由端边界  $x = L$  的情况。此时  $S_2 = L$ , 如图 3b 所示,试算表明此时的力 - 位移关系已处于临界失稳阶段,从而我们在分析中取  $S_1$  为加载控制变量来进行加载控制。

### 2.1 刚塑性本构模型结构失稳模式分析

当  $S_2 = L$  之后,裂纹前锋和损伤区继续向自由端边界移动。从而损伤过程区的尺寸将逐渐减少,直到  $S_1 = L$ , 损伤过程区完全消失,层间界面上只有摩擦滑动存在。在这一过程中,我们将把加载端的  $(0)$  和  $w(0)$  看作依赖于  $S_1$  的函数量而寻求平衡路径的解。很明显,对于本文的刚塑性模型,导数  $dw(0)/dS_1$  和  $d(0)/dS_1$  在  $S_2 = L$  条件发生前后的值是不连续的。由于在此点上  $d(0)/dw(0)$  发生不连续,从而导致结构的位移 - 载荷  $w(0) - (0)$  曲线将发生软化失稳 (snap-through) 或者回折失稳 (snap-back) 现象。

在尾区临界点之前,  $S_2 = L^-$ , 我们有:

$$\left. \begin{aligned} \left[ d(0)/dS_1 \right]_{S_2=L^-} > 0, \quad \left[ dw(0)/dS_1 \right]_{S_2=L^-} > 0, \\ \left[ d(0)/dw(0) \right]_{S_2=L^-} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在尾区过程开始以后,  $S_2 = L^+$ , 软化失稳和回折失稳都是可能的,这取决于界面层材料的力学性能等因素。对于软化失稳现象,有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \left[ d(0)/dS_1 \right]_{S_2=L^+} < 0, \quad \left[ dw(0)/dS_1 \right]_{S_2=L^+} > 0, \\ \left[ d(0)/dw(0) \right]_{S_2=L^+} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

对于回折失稳,则有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \left[ d(0)/dS_1 \right]_{S_2=L}^+ < 0, \quad \left[ dw(0)/dS_1 \right]_{S_2=L}^+ < 0, \\ \left[ d(0)/dw(0) \right]_{S_2=L}^- > 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在尾区过程开始以后,边界点上满足以下条件:

$$w(L) = 0, \quad w(S_1) = \frac{(f_c - \mu_n)}{K_s} \quad (8)$$

这两种可能的尾区行为示于图 1 中.

## 2.2 失稳过程中平衡路径上的解

### 2.2.1 软化失稳的解

现在考察一下软化失稳的情况. 软化失稳发生时,对应  $S_1$  的增长,力  $f(0)$  降低而位移  $w(0)$  增加,如不等式(6)所述. 由本研究( )中的式(28)的通解出发,结合在损伤过程中,  $x = L$  处和  $x = S_1$  处的边界条件:

$$w(L) = 0, \quad [w(S_1)] = [w(S_1)] = [W(S_1)] = 0 \quad (9)$$

又由于  $f(L) < f_c, w(L) = 0$ ,故式(29)中的系数  $c_1$  和  $c_2$  修正为:

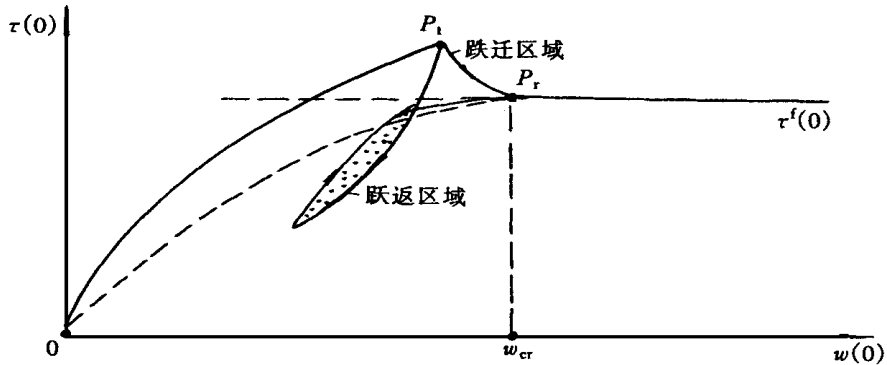


图 1 尾区行为示意图

$$c_1 = \frac{\mu_n \cos(r_s L)}{K_s \cos(r_s \bar{S}_d)}, \quad c_2 = \frac{\mu_n \sin(r_s L)}{K_s \cos(r_s \bar{S}_d)}, \quad \bar{S}_d = L - S_1 \quad (10)$$

从而尾区阶段损伤过程区内应力和位移的解为:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= Gr_s \frac{\mu_n \sin[r_s(L-x)]}{K_s \cos(r_s \bar{S}_d)}, \\ w(x) &= \frac{0}{K_s} + \frac{\mu_n}{K_s} \left\{ 1 - \frac{\cos[r_s(L-x)]}{\cos(r_s \bar{S}_d)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)与本研究( )中的摩擦滑动区的解式(24)一起,可得加载端  $x = 0$  处的力和位移为:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= S_1 \mu_n + Gr_s \frac{\mu_n}{K_s} \tan(r_s \bar{S}_d) \\ w(0) &= \frac{0}{K_s} + \frac{\mu_n}{2G} S_1^2 + \frac{\mu_n r_s S_1}{K_s} \tan(r_s \bar{S}_d) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

### 2.2.2 失稳模式判别条件

现在来计算  $f(0)$  和  $w(0)$  对于  $S_1$  的导数. 从式(12)及本研究( )中的式(25)可以求得这些量在尾区状态的导数,即:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d(0)}{dS_1} \right)_{S_2=L}^- &= \mu_n > 0, & \left( \frac{d(0)}{dS_1} \right)_{S_2=L}^+ \\ &= -\mu_n \sin^2(r_s \bar{S}_d) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{dw(0)}{dS_1} \right)_{S_2=L}^- &= \frac{f_c}{K_s} \sin(r_s \bar{S}_d) > 0, \\ \left( \frac{dw(0)}{dS_1} \right)_{S_2=L}^+ &= \frac{\mu_n}{K_s} r_s [1 - r_s(L - \bar{S}_d) \tan(r_s \bar{S}_d)] \tan(r_s \bar{S}_d). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

以上各式即是尾区开始阶段在  $S_2 = L$  时的导数值。由于式(13)第二式所示的导数为负,故  $S_1$  的扩展是非稳定的,不能由力载荷(0)来控制  $S_1$  的扩展。至于究竟发生软化失稳还是回折失稳,则取决于式(14)第二式所示的导数值的符号,即:

$$F = 1 - r_s(L - \bar{S}_d) \tan(r_s \bar{S}_d) > 0, \quad (15)$$

为软化失稳发生条件,而

$$F = 1 - r_s(L - \bar{S}_d) \tan(r_s \bar{S}_d) < 0. \quad (16)$$

为回折失稳条件。图2给出了在  $r_s$ - $F$  和  $S_d$ - $F$  两种平面内,两种失稳响应的值域。图1中  $P_r$  点处为位移-载荷曲线上斜率不连续变化点,这一点可称为“临界转折点”,以区别于导数  $d(0)/dS_1$  消失时对应点的极限状态点。注意到尾区过程的末尾有  $S_1 = L$  且

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d(0)}{dS_1} \right)_{S_1=L} &= 0, & \left( \frac{dw(0)}{dS_1} \right)_{S_1=L} &= 0, \\ \left( \frac{d(0)}{dw(0)} \right)_{S_1=L} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这一状态我们称之为“终态”,在位移-载荷曲线上用终点来表示  $P_r$ 。

### 2.2.3 回折失稳的解

现在再来计算回折失稳过程。式(11)中的尾区阶段界面层损伤过程区应力和位移解析解不变,分区边界点  $x = S_1$  及  $x = L$  处的边界条件仍同式(9)所示。在回折失稳发生时,自加载端  $x = 0$  至  $0 < x < S_1$  的一个范围内的某个区域上会发生反向滑动,致使加载端的位移下降,表现出回折失稳。但此时仍为加载过程,裂纹前锋  $S_1$  点继续向自由端扩展。让  $S_3$  表示反向滑动区与正向滑动区的交界点,反向滑动区的平衡方程为:

$$\frac{d}{dx} = -\mu_n. \quad (18)$$

从而求得对应反向滑动区的剪应力和位移场的解为:

$$\left. \begin{aligned} \tau(x) &= -\mu_n(x - S_3) + \tau(S_3), \\ w(x) &= \frac{\mu_n}{G} \left[ \frac{x^2}{2} - S_{31}x + \frac{S_3^2}{2} \right] + \\ &\quad - \frac{\tau(S_3)}{G} (S_3 - x) + w(S_3). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$x = S_2$  处的边界条件为:

$$[w(S_3)] = [w(S_3)] = 0, \quad [w(S_3)] = 0. \quad (20)$$

现在的问题首先是确定反向滑动区的范围即  $S_3$  的值。本文确定  $S_3$  的准则是:

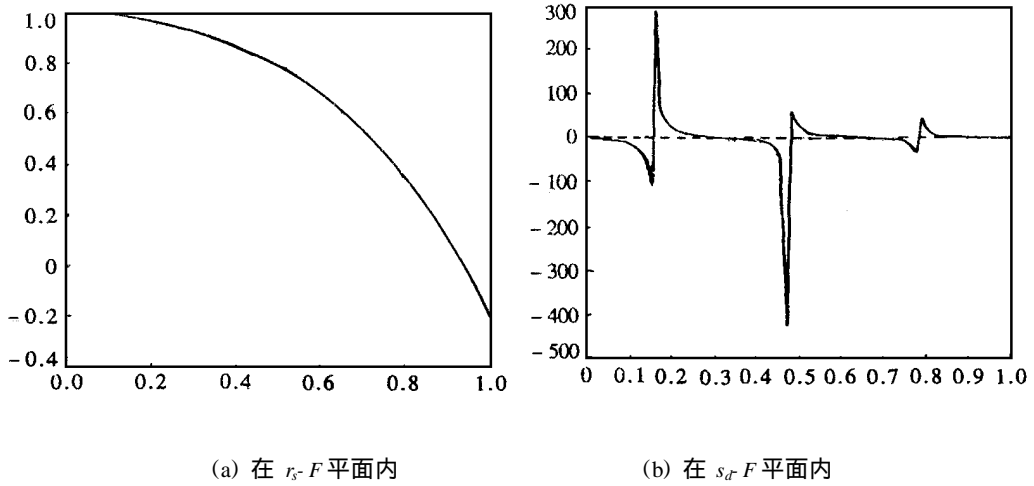


图2 两种失稳响应的值域

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w(x)}{\partial S_1} &> 0, \quad 0 < x < S_3, \quad \text{反向滑动,} \\ \frac{\partial w(x)}{\partial S_1} &= 0, \quad x = S_3, \quad \text{静止点,} \\ \frac{\partial w(x)}{\partial S_1} &> 0, \quad S_3 < x < S_1, \quad \text{正向滑动.} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

这里  $w(x)$  是本研究( )中式(24)表示的摩擦滑动区的位移值. 式(21)第一式意味着, 裂纹尖端  $S_1$  的无限小扩展会引起自加载端至  $S_3$  点这一范围内各点的总位移下降, 而  $S_3$  以外各点 ( $x > S_3$ ) 处的位移则增长, 也就是  $0 < x < S_3$  的范围上发生反向滑动. 根据单调加载情况下的解(本研究第一部分中的式(25)), 可得:

$$\frac{\partial w(x)}{\partial S_1} = -\frac{\mu_n}{G}(S_1 - x) + \frac{(S_1)}{G} + \frac{\partial(S_1)}{\partial S_1} \frac{(S_1 - x)}{G}.$$

而

$$\frac{\partial(S_1)}{\partial S_1} = Gr_s \left[ \begin{array}{l} \frac{dc_1}{dS_1} \sin(r_s S_1) + c_1 r_s \cos(r_s S_1) - \\ \frac{dc_2}{dS_1} \cos(r_s S_1) + c_2 r_s \sin(r_s S_1) \end{array} \right]. \quad (22)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_1}{dS_1} &= -\frac{r_s \mu_n}{K_s} \cos(r_s L) \frac{\sin(r_s \bar{S}_d)}{\cos^2(r_s \bar{S}_d)}, \\ \frac{dc_2}{dS_1} &= -\frac{r_s \mu_n}{K_s} \sin(r_s L) \frac{\sin(r_s \bar{S}_d)}{\cos^2(r_s \bar{S}_d)}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

将式(23)代入式(22), 整理, 并令  $x = S_3$ , 最后可得到:

$$\frac{\partial w(S_3)}{\partial S_1} = \frac{\mu_n r_s}{K_s \tan[r_s(L - S_1)]} \left\{ 1 - r_s(S_1 - S_3) \tan[r_s(L - S_1)] \right\} = 0. \quad (24)$$

从式(24)可得  $S_3$  的表达式

$$S_3 = S_1 - \frac{1}{r_s \tan[r_s(L - S_1)]}. \quad (25)$$

图3(a)绘出了  $S_3$  随  $S_1$  变化情况, 图3(b)给出了在回折失稳过程中, 对应给定的一组  $S_1$  值, 反

向滑动区边界点  $S_3$  的变化和界面层上剪应力  $\tau$  的演化情况 .

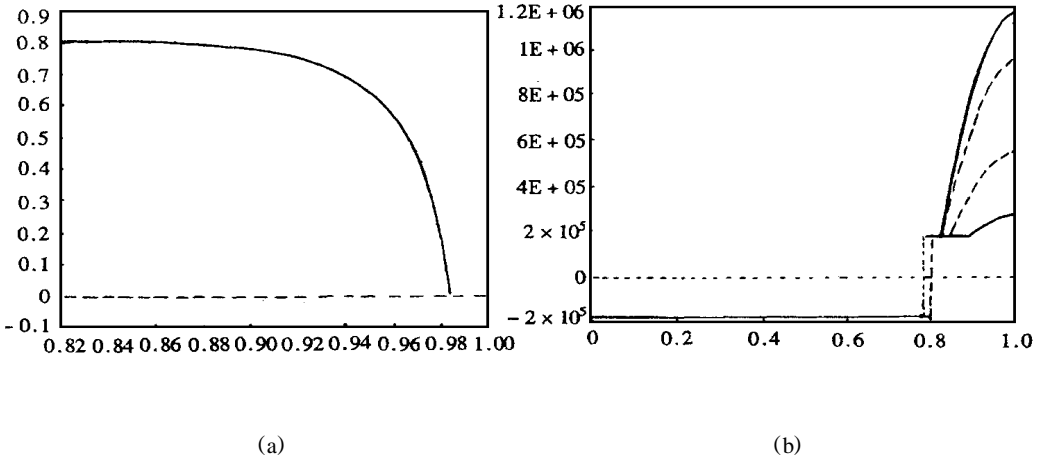


图 3 (a)  $S_3$  随  $S_1$  变化 ,(b)回折失稳过程中界面层上剪应力  $\tau$  的演化

在考虑了反向滑动以后的加载端上的力和位移分别为 :

$$\left. \begin{aligned} (0) &= (S_1 - 2S_3) \mu_n + Gr_s \frac{\mu_n}{K_s} \tan(r_s \bar{S}_d), \\ w(0) &= \frac{0}{K_s} + \frac{\mu_n}{2G} (2S_3^2 - S_1^2) + r_s S_1 \frac{\mu_n}{K_s} \tan(r_s \bar{S}_d). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

综合加载的三个阶段的解可得如图 4(a) 所示的加载端位移—载荷全过程曲线 . 计算过程中的参数取值为 :

$$G = 2.3438 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad \frac{0}{K_s} = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad h = 0.16, \quad \mu_n = 0.176 \times 10^6 \text{ Pa}$$

同时 ,弹性梁的剪切模量  $G$  取值与界面层的弹性剪切模量相同 .

对应所取的材料参数及载荷情况 ,从计算结果看 ,结构在裂纹形成以后 ,有较长的裂纹稳定扩展阶段 . 在尾区阶段 ,结构行为呈现明显的回折失稳 . 对问题的进一步试算发现 ,在一定的层间界面参数取值条件下 ,尾区阶段的回折失稳具有振荡特性 (反向滑动区多次反复出现、消失、再出现) ,这让人联想到地震中的余震现象 . 这一点有待进一步深入研究 .

### 2.3 失稳过程中的能量释放讨论

尾区阶段的回折失稳是一种与材料本构特性有关的结构行为 ,但并不是纯粹的材料行为 . 失稳模式由发生条件判别式 [式 (15)-(16)] 确定 . 这两式中既包含了材料性能参数 ,又包含了结构几何参数和外部环境应力参数 ,这说明只有在结构形式 ,材料性能 ,外部环境共同作用下 ,才可能发生回折失稳 .

回折失稳发生时 ,结构对外界的能量释放是一个重要的话题 ,因为能量释放的正确计算是模型用于工程失稳现象 (地震 ,岩爆等) 分析的前提 . 图 4(a) 中曲线与想象的大不相同 ,大家熟悉的回折失稳是图 4(b) 中曲线  $ADE$  所示的形式 . 本文结果中力载荷在回折失稳过程中下降至终态值以下 ,这是一个重要现象 .

回折失稳过程中结构对外界的能量释放过程就是对外界做功的过程 ,因此加载端反向位移标志着结构对外界的能量释放 ,释放的能量值则是图 4(b) 中曲线  $ABCA$  围成的阴影面积 ,其计算式为

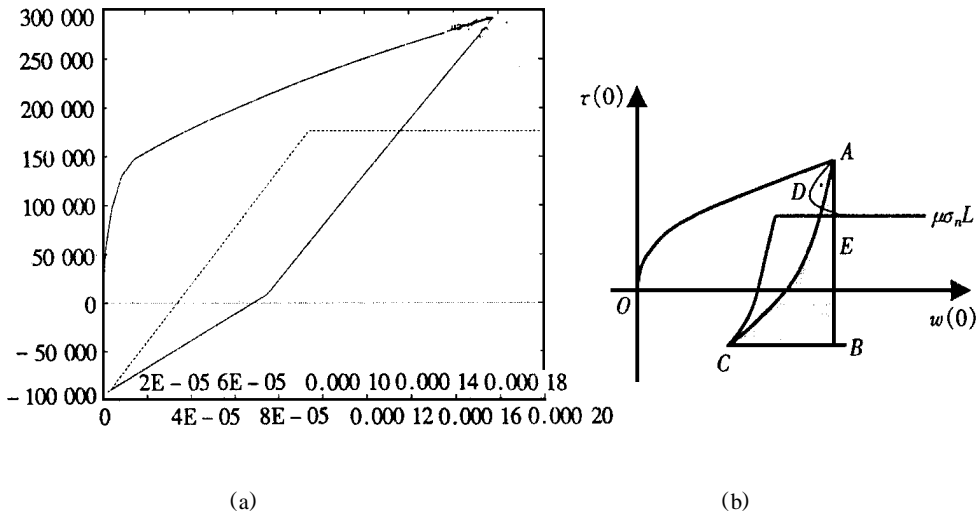


图4 (a) 位移—载荷全过程曲线, (b) 回折失稳过程中的能量释放

$$E^R = \int_{w(0)_1}^{w(0)_2} \tau(0) dw(0), \quad (27)$$

式中  $w(0)_1$  为反向位移开始时加载端的位移值,  $w(0)_2$  为反向位移结束时加载端的位移值。软化失稳过程中结构对外界的能量释放为 0。

### 3 结束语

本文在第 部分的基础上,使用剪切梁模型研究了界面层在裂纹萌生和失稳扩展阶段的行为特性:

1) 给出了软化失稳 (snap-through) 和回折失稳 (snap-back) 两种失稳行为发生的条件判别式。该条件既包含了材料性能参数,又包含了结构几何参数和外部环境应力参数,这说明只有在结构形式,材料性能,外部环境共同作用下,才可能发生回折失稳。

2) 对剪切梁在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下的力学行为作了解析分析计算,给出了结构的位移—载荷全过程曲线,在尾区阶段,结构行为呈现明显的回折失稳。对问题的进一步研究发现,在一定的层间界面材料参数取值条件下,尾区阶段的回折失稳具有振荡特性。

3) 讨论了失稳过程中的能量释放问题,指出加载端反向位移是结构对外界的能量释放的标志,软化失稳过程中结构对外界的能量释放为 0,并给出了回折失稳过程中结构对外界的能量释放的计算式。

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] Garg A C. Delemination—a damage mode in composite structures[J]. Engng Fract Mech, 1988, **29** (2): 557—584.
- [2] Hutchinson J W, Suo Z. Mixed mode cracking of layered materials[A]. In: W Hutchinson, T Y Wu, Eds. Adv Appl Mech[C]. **29**. New York: Academic Press, 1991, 63—191.
- [3] Yang B, Ravi-Chandar K. Anti-plane shear crack growth under quasi-static loading in a damaging material[J]. Int J Solids Struct, 1998, **35**(12): 3695—3715.

## Shear Beam Model for Interface Failure Under Antiplane Shear ( ) — Instability

SHEN Xin-pu<sup>1</sup>, Zenon Mroz<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanics, Northeastern University, Shenyang 110006, P R China;

2. Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy  
of Sciences, Warsaw, Poland)

**Abstract:** Based on the ( ) of the present work, the behavior of shear beam model at crack initiation stage and at instable propagation stage was studied. The prime results include: 1) discriminant equation which clarifies the mode of instability, snap-back or snap-through, was established; 2) analytical solution was given out for the double shear beam and the load-displacement diagram for monotonic loading was presented for a full process; and 3) the problem of the energy release induced by instability was discussed.

**Key words:** interface layer; antiplane shear; failure; shear beam model; instability; snap-through; snap-back; damage