

文章编号: 1000 - 7598 - (2004) 增 0013 05

混凝土损伤塑性本构模型研究

沈新普¹, 沈国晓², 陈立新³

(1.沈阳工业大学建筑工程学院, 沈阳 110023; 2.太原重型机械学院应用科学系, 太原 030024;

3.东北煤田地质局煤层甲烷气开发中心, 沈阳 110035)

摘 要: 提出了一种新的损伤塑性本构模型, 强调了应力三轴比对塑性屈服的影响。采用本研究设计的专门用于本构校验的计算机软件, 对上述模型的应力应变加载曲线进行了数值模拟, 数值结果与实验结果吻合得比较好。

关 键 词: 损伤; 塑性; 本构模型; 应力三轴比

中图分类号: TB 115 **文献标识码:** A

Study on a plastic constitutive damage model for concrete

SHEN Xin-pu¹, SHEN Guo-xiao², CHEN Li-xin³

(1.College of Architectural Engineering, Shenyang University of Technology Shenyang, 110023, China;

2.Department of Applied Sciences, Taiyuan Institute of Heavy Machine, Taiyuan 030024, China;

3.Development Center for Coal-bedded Methane, Northeastern Bureau of Coal Geology, Shenyang 110035, China)

Abstract: A plastic constitutive damage model was proposed with special concerns being put on simulating the stress triaxiality-dependent hardening phenomena. A driver subroutine was developed for the numerical validation of the constitutive model at local level. Comparison between the numerical results and the experimental data indicates the validity of the proposed model and the related numerical scheme.

Key words: Damage, plasticity, constitutive model, stress triaxiality

1 引 言

混凝土类材料与结构的失效破坏是以裂纹生成、扩展、及沿裂纹面的摩擦滑动为特征的。固体力学的损伤与塑性耦合分析方法是有效处理这一类问题的理论工具, 十几年来得到了广泛应用^[1,2]。标量损伤与塑性耦合的模型能够反映混凝土强度劣化及刚度软化的非弹性行为的主要特性, 又由于其简单易用, 因此是目前应用最为广泛的一类本构模型, 本文将结合标量损伤模型来建立一种新的损伤塑性耦合的本构模型。

本文模型是在文献[3]的塑性损伤本构模型的基础上提出的。该的模型本来是用于金属的塑性损伤分析的, 本文采用它是因为它具有下列优点: 这个模型中, 损伤的演化不仅取决于塑性应变的增加, 而且也弹性应变能具有解析的比例关系; 这个模型的损伤演化和塑性应变增长是耦合的, 两

者互相伴随; 该模型具有一定的开放性, 易于修改, 通过对参数取值的选择, 能够模拟硬化、软化等多种不同的本构行为现象。为了使模型适于混凝土的损伤分析, 本文在损伤演化及塑性计算中引入了‘应力三轴比’, 并采用了Drucker-Prager 塑性加载准则。

2 模型的理论描述

2.1 损伤塑性耦合本构模型基本关系

根据‘能量等效原理’, 基于塑性的损伤塑性耦合本构模型基本关系为:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{1-D}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}^e = (1-D)\varepsilon_{ij}^e, \\ \tilde{E}_{ijkl}^0 &= \frac{E_{ijkl}}{(1-D)^2} \\ Y &= (1-D)E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e \\ \sigma_{ij} &= E_{ijkl}^0 (1-D)^2 (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

收稿日期: 2004-04-30

基金项目: 辽宁省科技基金对本课题的资助(项目合同号 2001101023)。

作者简介: 沈新普, 男, 1963 年生, 博士, 教授, 主要研究方向有: 固体塑性损伤耦合本构理论与数值计算; 梯度依赖非局部本构模型; 火灾高温下混凝土结构内的热传递、水分运移与变形耦合分析; 岩石边坡稳定数值模拟。已发表相关学术期刊文章 30 余篇。 E-mail: xinpushen@vip.sina.com

式中 σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别表示应力张量和应变张量, 上标 p 表示塑性, e 表示弹性, 上波浪 \sim 表示虚拟净材料的力学量; D 为损伤变量; Y 为损伤共轭力; E_{ijkl}^0 初始无损材料的弹性张量。

2.2 损伤塑性耦合的损伤演化及塑性增量应力应变关系

文献表明, 混凝土试件试验所得的应力-应变曲线高度依赖于应力三轴比, 即: 随围压增加时, 混凝土的强度迅速增加。其实, 这一现象不仅在混凝土的应力-应变曲线的实验中存在, 在其它材料如复合材料、陶瓷等工程材料的应力应变曲线的实验中也存在。为了在数值模拟中考虑这一现象, 文献[5]给出了不同的解决方法, 所用的应力三轴比的定义也各不相同。

本文在参考了文献[6]采用的应力三轴比的基础上, 给出了以下的应力三轴比定义:

$$\gamma = \left| \frac{I_1/\sqrt{3}}{\sqrt{2J_2}} \right|, \quad J_2 \neq 0 \quad (2)$$

式中 $\tilde{I}_1 = \tilde{\sigma}_{ij}$ 为有效应力空间中的第一应力不变量; \tilde{J}_2 为偏应力张量的第二应力不变量, 且有

$$\tilde{J}_2 = \frac{1}{2} \tilde{s}_{ij} \tilde{s}_{ij}, \quad \text{其中 } \tilde{s}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\tilde{I}_1}{3}.$$

将应力三轴比引入到损伤塑性加载条件和非弹性势函数中得到如下表示式:

$$\tilde{f} = \alpha_F \tilde{I}_1 + \tilde{J}_2^{1/2} - [k + \lambda k_\infty (1 - e^{-b\gamma})] \leq 0 \quad (3)$$

$$F = \tilde{Q} + \frac{S\gamma}{s+1} \left(\frac{Y}{S\gamma} \right)^{s+1} (1-D)^\phi \quad (4)$$

式中 F 为损伤塑性势; \tilde{Q} 为有效应力空间中损伤塑性势的塑性部分, 且

$$\tilde{Q} = \alpha_Q \tilde{I}_1 + \tilde{J}_2^{1/2} - [k + \lambda k_\infty (1 - e^{-b\gamma})] \quad (5)$$

从而得塑性应变增量为:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

式中 λ 为损伤塑性乘子, 由式(13)计算。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{1}{(1-D)} \left(\alpha_Q \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right) \\ &- k_\infty \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} e^{-b\gamma} + \lambda b e^{-b\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

式中 δ_{ij} 为二阶单位张量; \tilde{s}_{ij} 为偏应力张量。由式(2)可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} &= (-1)^\eta \left[\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{6J_2}} - \frac{I_1 s_{ij}}{2\sqrt{6}} (J_2)^{-3/2} \right], \\ \eta &= \begin{cases} 1, & \text{if } I_1 < 0 \\ 2, & \text{if } I_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

同时可得损伤演化律为:

$$\dot{D} = \lambda \left(\frac{Y}{S\gamma} \right)^s (1-D)^\phi = \lambda \bar{Y} \quad (9)$$

式中

$$\bar{Y} = \left[\frac{(1-D)E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e}{S\gamma} \right]^s (1-D)^\phi \quad (10)$$

从式(9)(10)中可以看出, 损伤的演化不仅取决于塑性应变的增加, 而且也弹性应变能具有解析的比例关系。

综合上所述, 本模型的参数有: $E, \nu, k, \alpha_F, \alpha_Q$ 用于塑性计算, s, S, ϕ 主要用于损伤演化计算。应力三轴比 γ 是本模型中引入的一个非独立参数变量。

2.3 $\Delta \varepsilon_{ij}$ 对应的应力增量计算

利用以上的本构关系可以得出给定初始状态 $(\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^p, D_0)$ 和应变增量 $\Delta \varepsilon_{ij}$ 时的各力学量的计算公式, 其中的应力增量计算可通过对全量形式的应力表示式(1)求全微分, 并且对其在时间增量 Δt 内作线性化处理求得。从而有:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij} &= -\Delta \lambda \left[E_{ijkl}^0 (1-D)^2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma_{kl}} + 2E_{ijkl}^0 (1-D) \varepsilon_{kl}^e \bar{Y} \right] \\ &+ E_{ijkl}^0 (1-D)^2 \Delta \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (11)$$

并且进一步有对应一个应变增量的全应力表示式为:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma_{ij} \\ &= E_{ijkl}^0 (1-D_0)^2 (\varepsilon_{kl}^0 - \varepsilon_{kl}^p) + E_{ijkl}^0 (1-D_0)^2 \Delta \varepsilon_{kl} \\ &- \Delta \lambda \left[E_{ijkl}^0 (1-D_0)^2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma_{kl}^0} + 2E_{ijkl}^0 (1-D_0) (\varepsilon_{kl}^0 - \varepsilon_{kl}^p) \bar{Y}_0 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

上式中的损伤塑性乘子 λ 的表达式可以通过一致性条件解析求得:

$$\dot{\lambda} = \frac{A_{kl}}{B} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (13)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_{kl} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}^0 (1-D)^2 \\ B &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}^0 (1-D)^2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma_{kl}} + 2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}^0 \\ (1-D) \epsilon_{kl}^e \bar{Y} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial D} \bar{Y} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

从而可得对应一个应变增量 $\Delta \epsilon_{ij}$ ，将式 (14) 代入式 (错误！未找到引用源。)，相应的应力增量为：

$$\Delta \sigma_{ij} = -\frac{A_{kl}}{B} \left[E_{ijrs}^0 (1-D)^2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma_{rs}} + 2E_{ijrs}^0 (1-D) \epsilon_{rs}^e \bar{Y} \right] \Delta \epsilon_{kl} \quad (15)$$

$$+ E_{ijkl}^0 (1-D)^2 \Delta \epsilon_{kl}$$

进一步可得所谓的切线刚度张量：

$$E_{ijkl}^{ep} = E_{ijkl}^0 (1-D)^2 - \left[E_{ijrs}^0 (1-D)^2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma_{rs}} + 2E_{ijrs}^0 (1-D) \epsilon_{rs}^e \bar{Y} \right] \frac{A_{kl}}{B} \quad (16)$$

对应一个应变增量 $\Delta \epsilon_{ij}$ ，采用 Newton 法迭代求解损伤塑性加载因子 $\Delta \lambda$ 时相应的损伤塑性加载条件可以表示为：

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial (\Delta \lambda)} \cdot \Delta \lambda \leq 0 \quad (177)$$

式中 \tilde{f}_0 为初始应力状态 $\tilde{\sigma}_{ij}^0$ 对应的屈服条件值，其数项的表达式为：

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial (\Delta \lambda)} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial (\Delta \lambda)} + \frac{(\alpha I_1 + \sqrt{J_2})}{(1-D)^2} \frac{\partial D}{\partial (\Delta \lambda)} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial (\Delta \lambda)} \quad (18)$$

式(18)中的各项可以由式(1)及式(3)求导数得到，分别为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{1}{(1-D)} \left(\alpha \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right) - \\ k_{\infty} &\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} e^{-b\gamma\lambda} + \gamma b \lambda e^{-b\gamma\lambda} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial (\Delta \lambda)} &= -E_{ijkl}^0 (1-D)^2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma_{kl}} - \\ &2E_{ijkl}^0 (1-D) \epsilon_{kl}^e \left(\frac{Y}{S\gamma} \right)^s (1-D)^{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial (\lambda)} = -b\gamma^2 k_{\infty} e^{-b\gamma\lambda} \quad (21)$$

$$\frac{\partial D}{\partial (\Delta \lambda)} = \left(\frac{Y}{S\gamma} \right)^s (1-D)^{\phi} \quad (22)$$

最后，可得 $\Delta \lambda$ 和 \tilde{f} 形成的 Newton 法迭代公式：

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda_0 - \tilde{f}_0 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} \right)^{-1} \quad (23)$$

3 局部水平上的本构特性数值验证

在文献[4]提出的算法的基础上，本研究开发了一个用于三维本构验证的数值程序。其原理可以描述如下 给定轴向应变载荷的加载历史 $\epsilon_{11} = \epsilon_{11}(t)$ 和定常应力侧压 $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ ，根据施加的轴向应变载荷增量及应力-应变历史，按照前述的弹塑性损伤本构，迭代计算轴向的应力增量、以及侧向的应变增量。迭代计算在两个层次上进行，一个是外部的平衡迭代，另一个是内部的弹塑性迭代。下面将给出详细说明。

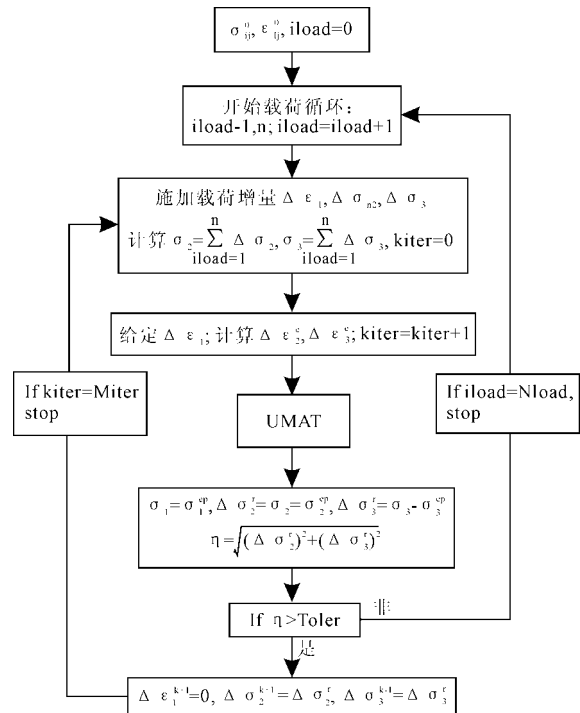


图 1 外部平衡迭代的流程图

Fig. 1 Flow chart of global equilibrium iteration

3.1 外部平衡迭代

所谓‘外部平衡迭代’就是将一个点看作是一个轴向受载的、侧向受应力约束的圆柱体，然后在应变载荷作用下的平衡迭代。给定初始状态 $(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^p, D)$ ，施加混合型的载荷增量 $(\Delta \epsilon_1, \Delta \sigma_2, \Delta \sigma_3)$ ，迭代求解未知的力学量 $(\Delta \sigma_1, \Delta \epsilon_2, \Delta \epsilon_3, D)$ 。由于只有一个点，故不涉及有

限元计算。

式(24)为在时间步长 Δt 内线性化了的弹塑性应力-应变关系：

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{22} \\ \Delta \epsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2222}^{ep} & E_{2233}^{ep} \\ E_{3322}^{ep} & E_{3333}^{ep} \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{33} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} E_{2211}^{ep} \\ E_{3311}^{ep} \end{Bmatrix} \Delta \epsilon_{11} \right] \quad (24)$$

式中 E_{ijkl}^{ep} 可由式 (16) 求得。迭代步骤在图中给出了详细说明。

在图 1 中, 子程序块 UMAT 为内部弹塑性损伤迭代的计算子块。其计算原理在采用了文献[7]提出的‘固定点’本构积分格式: 给定应变增量 $\Delta \epsilon_{ij}$, 局部水平上唯一的独立未知量为损伤塑性加载乘子 $\Delta \lambda$ 。

3.2 数值算例

本节给出的局部水平上的本构校验算例有(1)单轴拉伸; (2)单轴压缩; (3)不同的侧压作用下的轴向压缩。计算中采用的材料参数弹性模量 $E=31\ 140\text{ MPa}$, 泊松比 $\nu=0.2$, $\alpha_f=\alpha_Q=0.15$, $k=2\text{ MPa}$, $s=1$, $\phi=-1$, 拉伸时的 $S=10^{-10}$, $b=88$, $k_{\infty}=100\text{ MPa}$; 压缩时取 $S=4 \times 10^{-5}$, $b=500$, $k_{\infty}=248\text{ MPa}$ 。

3.3.1 单轴拉伸

采用本文模型得到的单轴拉伸时的应力-应变数值解如图 2。此时没有塑性硬化, 与文献[4]报告的实验结果相比较, 二者趋势符合很好, 数量上很接近。损伤演化响应示于图 3: 随应变载荷增加, 损伤值趋于极限值 1.0。

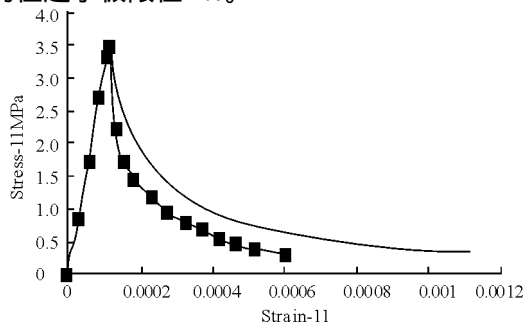


图 2 应力-应变数值解与文献[4]实验结果的比较

Fig.2 Stress-strain behaviour under uniaxial tension: comparison between numerical and experimental results

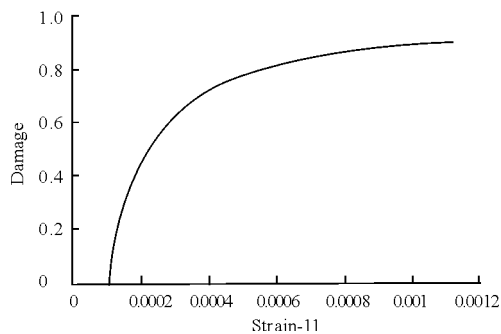


图 3 损伤演化响应.

Fig. 3 Damage evolution under uniaxial tension

3.3.2 单轴压缩

图 4 中给出了单轴压缩时的应力-应变数值解及相应的损伤演化响应, 并与文献[4]报道的应力-应变实验结果作了比较。从图中可见, 在峰值前区数值解与实验值符合的很好; 在峰值后区, 数值解与实验值符合的程度也是好的。

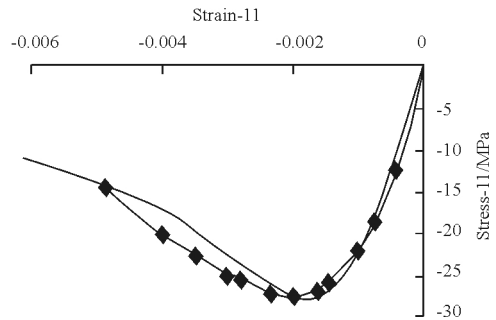


图 4 应力-应变数值解及其与实验值的比较

Fig.4 Stress-strain behaviour under uniaxial ompression

3.3.3 不同的侧压作用下的轴向压缩

混凝土的本构模型的一个重要特性是侧压力对应力应变特性的影响, 又称‘压力敏感’特性。本研究中的侧压力的施加方法如下: 大小为 $\sigma_m \mathbf{I}$ 的静水压力先于轴向应变载荷施加, 并按弹性处理。图 5 给出了不同的静水压力作用下, 采用数值求解得到的轴向应力-应变加载曲线。可以看出: 当静水压力增加时, 应力-应变曲线的软化特性变得越来越弱, 这一点与实验现象十分相符。

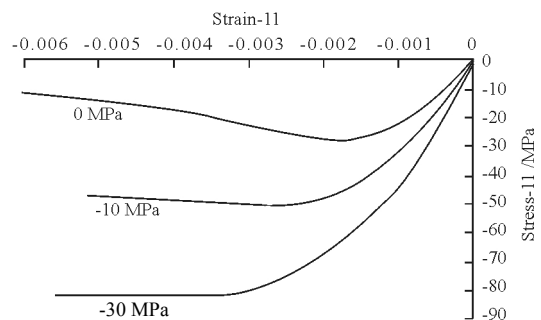


图 5 不同侧压作用下轴向压缩应力应变曲线

Fig.5 Influence of hydrostatic stress confinement: stress-strain behaviour ($\sigma_m = 0, -10, -30\text{ MPa}$)

4 结 论

本文提出了一个具有‘应力三轴比’依赖的损伤塑性本构模型, 开发了相应的用于本构局部水平上模型验证的计算机软件。数值结果与文献报道的实验结果的比较表明: 本模型及相应的软件能有效地模拟混凝土材料的损伤塑性特性。

6 岩土破损力学的特点

通过以上分析可以得出岩土材料系统的特点是：

(1) 岩土材料系统由结构体子系统和破损带子系统组成；

(2) 结构体子系统和破损带子系统之间是有度开放的，存在着复杂的反馈机制；

(3) 岩土材料系统通过“涨落”达到系统的有序；

(4) 结构子系统和破损带子系统之间的协同竞争推动整个系统向前发展；

(5) 岩土材料系统的发展是一种状态向另一种状态转变的过程，存在相变。

岩土破损力学着重强调了结构体子系统和破损带子系统之间是有度开放的，将其注意力集中在由子系统构成的岩土材料系统在宏观尺度上经历相变的演化规律，通过研究子系统的性质，理清子系统间的关联特征，进而揭示宏观系统的特性。最终目标是建立一种新的能反映细观和微观结构的宏观力学分析理论^[10]。

参 考 文 献

- [1] H.哈肯,协同学讲座[M],西安:陕西省科学技术出版社,1987.3.
- [2] 孙广忠.岩体结构力学[M],北京:科学出版社,1988.
- [3] 沈珠江、陈铁林.岩土破损力学:基本概念、目标和任务[A].中国岩石力学与工程学会第七次学术大会论文集[C].北京:中国科学技术出版社,2002.9~12.
- [4] 曾国屏,自组织的自然观[M],北京:北京大学出版社,1996.90.
- [5] Schmertmann J H. The mechanical aging soils[A]. *ProcASCE*[C].1991. 117(GT9):1288-1330
- [6] 沈珠江,软土工程特性和软土地基设计,岩土工程学报[J]. 1998, 20 (1):100-111
- [7] 沈珠江,结构性粘土的堆砌体模型[J]. 岩土力学,2000, 21 (1): 1-4.
- [8] 陈铁林,结构性粘土本构模型与参数测定[博士论文 D].南京:南京水利科学研究院,2001.
- [9] 钱学森等,论系统工程[M].长沙:湖南科学技术出版社,1982, 245.
- [10] 陈铁林,岩土材料二元介质模型的初步研究,博士后研究报告[R],北京:清华大学,2004.

上接第 16 页

参 考 文 献

- [1] Shen X P, Mroz Z, Xu B. Constitutive theory of plasticity coupled with orthotropic damage for geomaterials [J]. *Applied Mathematics and Mechanics: English Edition*, 2001, 22(9): 1028-1034.
- [2] Swoboda G, Shen X P, Rosas L. Damage model for jointed rock mass and its application to tunnelling [J]. *Computer and Geotechnics*, 1998, 22(3/4): 183-203.
- [3] Saanouni K, Forster C, Hatira F B. On the anelastic flow with damage [J]. *Int. J. Dama. Mech.*, 1994, 3(1): 140-169.
- [4] Hashash Y M A, Wotring D C, Yao J I C, Lee J S, Fu Q. Visual framework for development and use of constitutive models [J]. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2002, 26(3): 1493-1513.
- [5] Borvik T, Hopperstad O S, Berstad T. On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. Part II. Numerical study [J]. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2003, 22(1): 15-32.
- [6] Liebe T, Willam K. Localization properties of generalized Drucker-Prager elastoplasticity [J]. *ASCE J. Engineering Mechanics*, 2001, 127(2): 616-619.
- [7] Chaboche J L, Cailletaud G. Integration methods for complex plastic constitutive equations [J]. *Comp. Methods. Appl. Mech. Engng.*, 1996, 133(1): 125-155.
- [8] Lee J, Fenves G L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures [J]. *ASCE J. Engng Mech.*, 1998, 124(3): 892-900.