

固支及简支圆板在均布侧压作用下的 弹脆塑性承载能力分析*

沈新普 岑章志 徐秉业

(清华大学 北京 100084)

摘 要

圆板是工程中常见的一种结构形式。本文采用弹脆塑性本构模型,对弹塑性载荷作用下固支圆板的弯曲作了详细的分析研究,得出了对应材料残余强度系数不同取值范围的圆板的承载能力解析表达式。文中对加载过程中屈服面的变化情况作了探讨。文末还给出了相应的简支圆板的弹脆塑性承载能力表达式。

关键词:圆板;弹脆塑性;承载能力

1 引 言

自从材料的弹脆塑性本构模型问世以来^[1],尤其是“损伤面扰动法”的求解方法提出之后^[2],许多岩土材料经典结构问题的极限承载能力的解析解获得了新的结果^[3]。但是对于较复杂的典型结构,如固支圆板等,由于未有新的求解结果出现,致使这一在建筑及土木工程中广泛存在的结构形式,目前在有关工程的力学分析与设计中,一般仍采用以往的弹性及理想弹塑性的分析结果。本文通过对固支圆板在均布载荷作用下的弯曲分析,对多个损伤面(弹塑性分界面)情况下,使用“损伤面扰动法”的原理,求极限承载能力作了研究和尝试,同时对应力点从初始屈服面向后继屈服面的跌落路径作了分析研究。此外,文中就残余强度系数 β 的数值对结构弹塑性稳定性的影响作了详细的计算与分析,得出了一些有意义的结果及结论。

2 基本假设和基本方程

2.1 基本假设

- 在板的截面上沿厚度方向同为弹性或塑性状态,无弹性核现象,这在实际中对应的是夹心板模型。
- 材料为不可压缩材料,取波松比 $\nu = 0.5$ 。

* 来稿日期:1994-04-13;修回日期:1994-08-21

c. 板厚为 h , 半径为 R , 受均载 p 作用。

本文采用极坐标描述问题, M_r 表示径向弯矩, M_φ 表示周向弯矩, 径向曲率为 κ_r , 周向曲率为 κ_φ , M_0 表示截面的理想塑性极限承载能力, βM_0 为塑性区截面上的残余承载能力, E 为弹性模量。

2.2 基本方程

平衡方程:
$$(rM_r)' = M_\varphi - \int_0^r pr dr \tag{1}$$

相容方程:
$$\kappa_r - (r\kappa_\varphi)' = 0 \tag{2}$$

弯矩与曲率的关系:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}Eh^3\kappa_r = 2M_r - M_\varphi \\ \frac{1}{6}Eh^3\kappa_\varphi = 2M_\varphi - M_r \end{cases} \tag{3}$$

屈服条件:

采用六边形 Tresca 广义屈服条件, 如图 2 示。

3 固支圆板弹脆塑性弯曲分析

固支圆板受均布侧压如图 1 示。

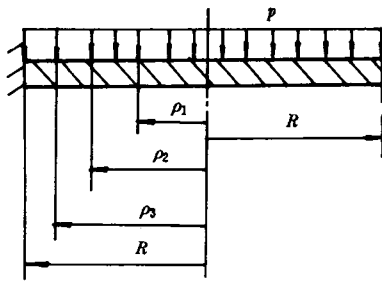


图 1 固支圆板受侧压

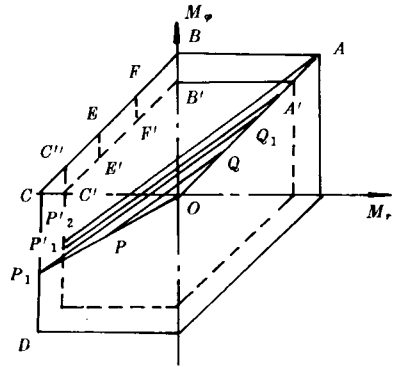


图 2 内力分布图

3.1 弹性状态下的弯曲分析

弹性状态下的弯矩分布由式(3)代入式(2)并积分, 同时积分平衡方程式(1), 联立求得:

$$\begin{cases} M_r = -\frac{7}{32}pr^2 + \frac{C_1}{r^2} + C_2 \\ M_\varphi = -\frac{5}{32}pr^2 - \frac{C_1}{r^2} + C_2 \end{cases} \tag{4}$$

式中 C_1 、 C_2 为积分常数。

将边界条件

$$\begin{cases} M_r(0) - M_\varphi(0) = 0 \\ w'(R) = 0 \end{cases}$$

代入式(4), 求得问题的弹性解为

$$\begin{cases} M_r = \frac{pR^2}{32} \left(3 - \frac{7r^2}{R^2} \right) \\ M_\varphi = \frac{pR^2}{32} \left(3 - \frac{5r^2}{R^2} \right) \end{cases} \quad (5)$$

约去 r , 得:

$$7M_\varphi - 5M_r = \frac{3}{16}pR^2 \quad (6)$$

式(6)表明,对给定的 p ,板内各 r 值上的应力点形成应力线 PQ ,如图 2 示,点 P 表示 $r = R$ 点,点 Q 表示 $r = 0$ 点。 P 点达屈服面上的 P_1 点时,与 Q 相对应的 Q_1 点估为弹性点, P_1 对应的载荷由 $M_r(R) = -M_0$ 得:

$$p_1 = \frac{8M_0}{R^2} \quad (7)$$

3.2 求板中心开始进入屈服时的载荷

当 p 增加至越过 P_1 ,若边缘塑性区形成并向内扩展,则由平衡方程和屈服条件 $M_r = -\beta M_0$,进而得 $|M_\varphi| > (4 - \beta)M_0$,破坏了屈服条件,故可认为:此时塑性区在边缘局部化为塑性铰并发生脆性跌落,导致板内的 M_r 及 M_φ 重新分布,只有当板边应力点达到屈服面上的 C'' 点时,板边塑性区才可能扩展。这样,边界条件 $w(R) = 0$ 仍成立, $w'(R) = 0$ 被 $M_r(R) = -\beta M_0$ 代替,在边界条件 $M_r(R) = -\beta M_0$ 及 $M_r(0) = M_\varphi(0)$ 下,求得相应的解为:

$$\begin{cases} M_r = -\beta M_0 + \frac{7}{32}pR^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\ M_\varphi = -\beta M_0 + \frac{pR^2}{32} \left(7 - \frac{5r^2}{R^2} \right) \end{cases} \quad (8)$$

约去 r , 得:

$$5M_r - 7M_\varphi = 2\beta M_0 - \frac{7pR^2}{16}$$

此时各处应力点形成的应力分布图仍为一直线,这类应力分布线的极限位置为 P'_2A ,相应的载荷 p_2 由式(8)中的 $M_\varphi(0) = M_0$ 求得:

$$p_2 = \frac{32(1 + \beta)M_0}{7R^2} \quad (9)$$

若载荷达到 p_2 ,板的中心即进入塑性。

由 $p_1 = p_2$ 解得 $\beta = 0.75$ 。故当 $\beta > 0.75$ 时, $p_2 > p_1$,板边进入塑性成铰后继续加载到 p_2 ,中心才进入塑性;若 $\beta \leq 0.75$,则 $p_2 \leq p_1$,板边与中心在同一载荷水平下相继进入塑性。

3.3 求解弹脆塑性问题

p 继续增加,超过 p_2 ,板中心形成半径为 ρ 的塑性区: $0 < r < \rho$ 。

中心屈服区的弯矩由平衡方程及屈服条件

$$M_\varphi = \beta M_0$$

得:

$$\begin{cases} M_r = \beta M_0 - \frac{pr^2}{6} \\ M_\varphi = \beta M_0, \quad 0 \leq r \leq \rho \end{cases} \quad (10)$$

外围弹性环的解由式(4),在 M_r 的连续条件

$$M_r(R) = -\beta M_0, M_r(\rho) = \beta M_0 - \frac{p\rho^2}{6}$$

下解得

$$\begin{aligned}
 M_r &= -\frac{7}{32}pr^2 + \frac{1}{r^2} \frac{R^2\rho^2}{(\rho^2 - R^2)} \left[\frac{7p}{32}(R^2 - \rho^2) + \frac{p\rho^2}{6} - 2\beta M_0 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{R^2 - \rho^2} \left[-\beta(R^2 + \rho^2)M_0 + \frac{p\rho^4}{6} + \frac{7p}{32}(R^4 - \rho^4) \right] \\
 M_\varphi &= -\frac{5}{32}pr^2 - \frac{1}{r^2} \frac{R^2\rho^2}{(\rho^2 - R^2)} \left[\frac{7p}{32}(R^2 - \rho^2) + \frac{p\rho^2}{6} - 2\beta M_0 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{R^2 - \rho^2} \left[-\beta(R^2 + \rho^2)M_0 + \frac{p\rho^4}{6} + \frac{7p}{32}(R^4 - \rho^4) \right]
 \end{aligned}$$

3.4 求 $\beta C''$

3.4.1 求 C'' 处的边界条件

式(11)所示的应力状态适用范围为板边应力点达 C'' 点之前,此时由损伤面弹性区一侧的扩展函数 $F = M_\varphi(\rho) - M_0 = 0$ 得:

$$\begin{aligned}
 M_\varphi(\rho) &= -\frac{5}{32}p\rho^2 - \frac{R^2}{\rho^2 - R^2} \left[\frac{7p}{32}(R^2 - \rho^2) + \frac{pR^2}{6} - 2\beta M_0 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{R^2 - \rho^2} \left[-\beta(R^2 + \rho^2)M_0 + \frac{p\rho^4}{6} + \frac{7p}{32}(R^4 - \rho^4) \right] = M_0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

整理之得:

$$p = \frac{48[(3\beta + 1)R^2 - (1 - \beta)\rho^2]M_0}{21R^4 - 10R^2\rho^2 + 5\rho^4} \quad (13)$$

将式(13)代入(11)且记 $21R^4 - 10R^2\rho^2 + 5\rho^4 = A$ 得:

$$\begin{aligned}
 M_\varphi &= -\frac{5}{32}pr^2 - \frac{1}{r^2} \frac{R^2\rho^2}{(\rho^2 - R^2)A} \left[21(1 - \beta)R^4 - (46\beta - 26)R^2\rho^2 \right. \\
 &\quad \left. + 5(1 - 3\beta)\rho^4 \right] M_0 + \frac{M_0}{2A(R^2 - \rho^2)} \left[21(1 + \beta)R^6 - (21 + \beta)R^4\rho^2 \right. \\
 &\quad \left. - 5(\beta + 1)R^2\rho^4 + 5(1 - 3\beta)\rho^6 \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

应力图(图 2) C'' 点的弹性区一侧有

$$M_\varphi(R) = (1 - \beta)M_0$$

代入式(14)得:

$$(48 - 66\beta)R^6 + (80\beta - 42)R^4\rho^2 + (46 - 56\beta)R^2\rho^4 - 30\beta\rho^6 = 0$$

令 $\rho/R = x$,化简之,得:

$$-15\beta x^6 + (23 - 28\beta)x^4 + (40\beta - 21)x^2 + (24 - 33\beta) = 0 \quad (15)$$

式(15)即为 C'' 点对应的边界条件。

3.4.2 求 $\beta \leq \beta C''$ 时的失稳临界条件

依由扩展函数法求得的式(13)表达的 p 的表达式,取载荷因子

$$\lambda = \frac{p}{M_0} = \frac{48(3\beta + 1)R^2 - (1 - \beta)\rho^2}{21R^4 - 10R^2\rho^2 + 5\rho^4} = 48 \frac{f_1}{f_2}$$

则临界条件为:

$$\lambda' = 48 \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2} = 0$$

即 $f_1' f_2 - f_1 f_2' = 0$ 为临界条件:

从而得:

$$5(1 - \beta)\rho^4 - 10(3\beta + 1)R^2\rho^2 - (11 - 51\beta)R^4 = 0$$

令 $\rho/R = x$,代入上式,得:

$$5(1 - \beta)x^4 - 10(3\beta + 1)x^2 - (11 - 51\beta) = 0 \quad (16)$$

解方程(16)得合理解为:

$$x^2 = \frac{3\beta + 1 - \sqrt{19.2\beta^2 + 6.4\beta + 3.2}}{1 - \beta} \quad (17)$$

讨论:

(i) 令 $x^2 = 0$, 得 $\beta = \frac{11}{51} = \beta_1$. 故当 $\beta \leq \beta_1$ 时, 弹性极限即为圆板的脆塑性极限, 中心一进入塑性, 损伤面即失稳扩展, 板失去承载能力。

(ii) 将式(16)与式(15)联立求解得:

$$\beta_c = 0.7273, \quad \rho_c = 0.9225R$$

即当 $\beta \leq 0.7273$ 时, 中心损伤面在板边塑性区扩展之前失稳扩展; $\beta > 0.7273$ 时, 中心塑性区在板边塑性区扩展到一定程度时才可能失稳扩展。

(iii) 将式(17)代入式(13)得相应于 $11/51 < \beta < 0.7273$ 时的最大承载能力 p_3^* 的表达式

$$p_3^* = \frac{48(1 - \beta) \sqrt{19.2\beta^2 - 6.4\beta + 3.2}}{16 - 36\beta + 5\beta^2} \frac{M_0}{R^2} \quad (18)$$

3.5 求解具有两个可扩展损伤面的弹脆塑性问题

3.5.1 求弯矩分布

若 $\beta > \beta_c$, 载荷增加, 板边塑性区形成且扩展。设板边塑性区内半径为 ρ_3 , 中心塑性区为 ρ_1 , 如图 1 示。此时外环塑性区的解由屈服条件 $M_\varphi - M_r = \beta M_0$ 及式(1)平衡方程联立求得:

$$\begin{cases} M_r = \beta M_0 \ln r - pr^2/4 + C_3 \\ M_\varphi = \beta M_0 (1 + \ln r) - pr^2/4 + C_3 \end{cases} \quad (19)$$

由边界条件 $M_r(R) = -\beta M_0$ 得

$$C_3 = -\beta M_0 (1 + \ln R) + pR^2/4$$

代入式(19)得外环塑性区的解为

$$\begin{cases} M_r = -\beta M_0 + \beta M_0 \ln \frac{r}{R} + \frac{p}{4} (R^2 - r^2) \\ M_\varphi = \beta M_0 \ln \frac{r}{R} + \frac{p}{4} (R^2 - r^2), \rho_3 \leq r \leq R \end{cases} \quad (20)$$

中心塑性区的解仍为式(10), 其中 ρ 为 ρ_1 代替。中间弹性环的解由通解式(4)及 M_r 在 $r = \rho_1$ 及 $r = \rho_3$ 处的连续条件可以求得 M_r 及 M_φ 的表达式(略)。

3.5.2 求给定 β 时的最大承载能力

给定 β , 使结构在内部塑性区应力点扩展到图 2 中的 B' 点前失稳且使 $\beta > \beta_c$, 则可由扩展函数固定法求 $\beta_c < \beta \leq \beta_B$ 时的最大承载能力。这里 β_B 为应力点达 B' 点时结构失稳的临界 β 值。

由弹性区的弯矩分布及 $M_\varphi = M_0$ 得, 当内部塑性区应力点不超过 B' 点时在损伤面的弹性区一侧, 有:

$$\begin{aligned} M_\varphi(\rho_1) &= -\frac{5}{32} p \rho_1^2 + \frac{\beta M_0}{\rho_3^2 - \rho_1^2} \left[\frac{-6\rho_3^4 - 21\rho_3^2 \rho_1^2 + 48\rho_3^2 R^2 - 21\rho_1^4}{16\rho_1^2} - 2\rho_3^2 (1 - \ln \frac{\rho_3}{R}) \right] \\ &= M_0 \end{aligned} \quad (21)$$

从而得:

$$p = \frac{2M_0}{5\rho_1^4(\rho_3^2 - \rho_1^2)} \left[-6\beta\rho_3^4 - (53\beta + 16)\rho_3^2\rho_1^2 + 48\beta\rho_3^2R^2 + (21\beta - 16)\rho_1^4 + 32\beta\rho_1^2\rho_3^2 \ln \frac{\rho_3}{R} \right] \quad (22)$$

取载荷因子

$$\lambda = \frac{p}{M_0} \quad (23)$$

得极值条件:

$$F = \lambda' \rho_1 + \lambda'_{\rho_3} \frac{d\rho_3}{d\rho_1} = 0 \quad (24)$$

式中 $d\rho_3/d\rho_1$ 可通过由弯矩条件求得 $\rho_3 = \rho_3(\rho_1)$ 之后求导而得。

由式(23)得:

$$\lambda'_{\rho_1} = (21\beta - 16)\rho_1^3 - (35\beta + 16 - 32\beta \ln \frac{\rho_3}{R})\rho_1^2\rho_3^2 + (106\beta + 32 - 64\beta \ln \frac{\rho_3}{R}) \cdot \rho_3^2\rho_1 - 12\beta\rho_3^2 - 48\beta\rho_3^2R^2(3\rho_1^2 - 2\rho_3^2) \quad (25)$$

$$\lambda'_{\rho_3} = (148\beta - 64\beta \ln \frac{\rho_3}{R})\rho_1^2 + 24\beta\rho_3^2\rho_1^2 - 96\beta R^2\rho_1^2 - 12\beta\rho_3^4 \quad (26)$$

在给定的 β 值及 R 值条件下,由弯矩条件求得 ρ_3 与 ρ_1 的关系,代入式(24),连同式(25)及式(26),即可求得结构临界失稳的各个 ρ 值,将所得 ρ_1 及 ρ_3 值代入载荷表达式(22)即得相应的极限承载能力。

3.5.3 求 β_B

式(19)~(26)的适用范围为内部塑性区的应力点扩展不超过应力图2上的 B' 点之前,当扩展到 B' 点时,由相应的弹性区与塑性交界处的力边界条件得:

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{8 - 3\beta}{3\beta}} \rho_1 \quad (27)$$

$$\frac{d\rho_3}{d\rho_1} = \sqrt{\frac{8 - 3\beta}{3\beta}} \quad (28)$$

又由 B' 点对应的损伤面弹性区一侧的屈服函数

$$M_{\varphi}(\rho_1) = M_0,$$

$$\text{得: } \left(\frac{16}{\beta} - 6\right)\rho_1^4 - \left(68 + \frac{16}{\beta}\right)\rho_1^2\rho_3^2 - 6\rho_3^4 + 32\rho_1^2\rho_3^2 \ln \frac{\rho_3}{R} + 48\rho_3^2R^2 = 0 \quad (29)$$

将式(25)~(28)代入(24)可得临界条件,与式(29)联立求解可得满足条件的 β_B 及相应的 ρ_1 和 ρ_3 值,分别为:

$$\beta_B = 0.9345, \rho_1 = 0.7282R, \rho_3 = 0.9914R$$

同时由式(22)得相应的载荷为 $p_i^* = 10.57 \frac{M_0}{R^2}$

3.6 $\beta > \beta_B$ 时的内力分布及结构承载能力分析

载荷超过 p_i^* 继续增加,板内应力分布对应应力图中4个区域,如图2所示,分别为:

区域1:外环塑性区 $C'E'$,外半径 R ,内半径 ρ_3 ,方程为:

$$\begin{cases} M_r = \beta M_0 \ln \frac{r}{R} - \frac{pr^2}{4} + C_3 \\ M_{\varphi} = \beta M_0 \left(1 + \ln \frac{r}{R} - \frac{pr^2}{4}\right) + C_3, \rho_3 < r \leq R \end{cases} \quad (30)$$

由边界条件 $M_r(R) = -\beta M_0$ 得:

$$C_3 = \frac{pR^2}{4} - \beta M_0 (1 + \ln \frac{r}{R})$$

从而得外环塑性区的解为:

$$\begin{cases} M_r = -\beta M_0 + \beta M_0 \ln \frac{r}{R} + \frac{p}{4}(R^2 - r^2) \\ M_\theta = \beta M_0 \ln \frac{r}{R} + \frac{p}{4}(R^2 - r^2) \end{cases} \quad (31)$$

区域 3: 塑性区 $F'B'$, 外半径 ρ_1 , 内半径 ρ_2 , 方程同区域 1, 由边界条件, $M_r(\rho_2) = 0$ 得:

$$C_3 = \frac{1}{4} p \rho_2^2 - \beta M_0 \ln \frac{\rho_2}{R}$$

从而得其解为:

$$\begin{cases} M_r = \beta M_0 \ln \frac{r}{\rho_2} - \frac{p}{4}(r^2 - \rho_2^2) \\ M_\theta = \beta M_0 + \beta M_0 \ln \frac{r}{\rho_2} - \frac{p}{4}(r^2 - \rho_2^2) \end{cases} \quad (32)$$

区域 4: 中心塑性区, 外半径为 ρ_2 , 解同式(10)。

区域 2: 弹性区 EF , 内半径 ρ_1 , 外半径 ρ_3 . 由式(4) 及 ρ_1 和 ρ_3 处 M_r 的连续条件得:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\rho_1^2 \rho_3^2}{\rho_1^2 - \rho_3^2} \left[\frac{p}{32} (8R^2 - \rho_3^2 + \rho_1^2 - 8\rho_2^2) - 8M_0 (1 - \ln \frac{\rho_2 \rho_3}{R \rho_1}) \right] \\ C_2 = \frac{1}{\rho_3^2 - \rho_1^2} \left[-\beta \rho_3^2 M_0 + \beta M_0 \rho_3^2 \ln \frac{\rho_3}{R} - \rho_1^2 \beta M_0 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{p}{32} (8R^2 \rho_3^2 - \rho_3^4 + \rho_1^4 - 8\rho_1^2 \rho_2^2) \right] \end{cases} \quad (33)$$

将式(33) 代入式(4) 即为弹性环的解。

3.7 弹性环消失后结构的残余承载力分析

由于岩土材料的残余强度系数一般均小于 0.9, 故本小节内容适于软钢结构, 这类材料的残余强度系数根据国际同行们的研究意见, 认为在 0.98 以下。

由条件 $M_r(\rho_2) = 0$, 及式(10) 的第一式得:

$$p = \frac{6\beta M_0}{\rho_2^2} \quad (34)$$

将 p 代入式(33) 得:

$$C_1 = \frac{\rho_1^2 \rho_3^2}{\rho_1^2 - \rho_3^2} \left[\frac{3\beta M_0}{16\rho_2^2} (8R^2 - \rho_3^2 + \rho_1^2 - 8\rho_2^2) - \beta M_0 (1 - \ln \frac{\rho_2 \rho_3}{R \rho_1}) \right] \quad (35)$$

由 $r = \rho_3$ 及 $r = \rho_1$ 处弹性区一侧的屈服函数值可以求得:

$$p = \frac{16M_0}{\rho_3^2 + \rho_1^2} \quad (36)$$

式(36) 与式(34) 比较得:

$$\rho_2^2 = \frac{3\beta}{8} (\rho_3^2 + \rho_1^2) \quad (37)$$

将式(37) 代入(35) 得:

$$C_1 = \frac{\rho_1^2 \rho_3^2}{\rho_1^2 - \rho_3^2} \left\{ \frac{M_0}{2(\rho_3^2 + \rho_1^2)} [8R^2 - (1 + 3\beta)\rho_3^2 + (1 - 3\beta)\rho_1^2] \right\}$$

$$- \beta M_0 \left[1 - \frac{1}{2} \ln \frac{3\beta(\rho_3^2 + \rho_1^2)\rho_3^2}{8R^2\rho_1^2} \right] \quad (38)$$

由于弹性环消失时 $\rho_1 = \rho_3 = p$ 为有限值, 故此时式(38)中大括号中表达式值应为零, 取此时

$$\rho_3 = \rho_1 = r_0$$

从而可得:

$$8R^2 - 6\beta r_0^2 - 4\beta r_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \ln \frac{3\beta r_0^2}{4R^2} \right) = 0 \quad (39)$$

取 $r_0/R = x$, 进一步整理得:

$$8 - 10\beta x^2 + 2\beta x^2 \ln \left(\frac{3\beta}{4} x^2 \right) = 0 \quad (40)$$

将给定的 β 代入式(40), 求得 x 值, 再代回式(36) p 的表达式, 即得相应的结构残余承载能力。示例如下:

给定: $\beta = 1.0$, 解得 $x = 0.843$, $p = 11.257 \frac{M_0}{R^2}$, 即为理想塑性时的承载极值。

给定: $\beta = 0.95$, 解得 $x = 0.865$ 。

$$p = 10.694 \frac{M_0}{R^2} = 11.257\beta \frac{M_0}{R^2} = \beta p_0 \quad (41)$$

同样, 给定其它的 β 值也可得到 $p = 11.257\beta \frac{M_0}{R^2} = \beta p_0$ 式中 p_0 为理想塑性结构的极限承载能力值。

4 简支圆板

相对而言, 简支板在均布侧压作用下的弹脆塑性弯曲分析容易一些, 现略去过程, 将简支板的分析结果给出如下(基本假设及几何条件仍同前):

① 弹性区的解:

$$\begin{cases} M_r = -\frac{7}{32}pr^2 + \frac{1}{r^2} \frac{R^2\rho^2}{(R^2 - \rho^2)} \left[\frac{7p}{32}(\rho^2 - R^2) \right. \\ \quad \left. + \beta M_0 - \frac{p\rho^2}{6} \right] + \frac{1}{\rho^2 - R^2} \left[\frac{7p}{32}(\rho^4 - R^4) + \beta\rho^2 M_0 - \frac{p\rho^4}{6} \right] \\ M_\rho = -\frac{5}{32}pr^2 - \frac{1}{r^2} \frac{R^2\rho^2}{(R^2 - \rho^2)} \left[\frac{7p}{32}(\rho^2 - R^2) \right. \\ \quad \left. + \beta M_0 - \frac{p\rho^2}{6} \right] + \frac{1}{\rho^2 - R^2} \left[\frac{7p}{32}(\rho^4 - R^4) + \beta\rho^2 M_0 - \frac{p\rho^4}{6} \right] \end{cases} \quad (42)$$

式中 $R \geq r \geq \rho$

② 塑性区的解:

$$\begin{cases} M_\rho = \beta M_0 \\ M_r = \beta M_0 - \frac{pr^2}{6}, \quad \rho \geq r \geq 0 \end{cases} \quad (43)$$

③ 弹脆塑性载荷:

$$p = \frac{48[R^2(\beta + 1) + \rho^2(\beta - 1)]}{21R^2 - 10R^2\rho^2 - 5\rho^4} M_0 \quad (44)$$

④ 给定 β 时的弹脆塑性承载临界条件:

$$5(1 - \beta)\rho^4 - 10(1 + \beta)R^2\rho^2 + (31\beta - 11)R^4 = 0 \quad (45)$$

5 结 论

- 1) 弹脆塑性固支圆板在受弯过程中可能存在一个以上的损伤面,这时仍可用损伤面扰动法的原理求得结构的失稳临界条件及临界载荷值。
- 2) 弹脆塑性材料圆板的失稳临界条件与残余强度参数 β 有很大关系。在不同的 β 值范围内,临界条件有不同的形式,极限载荷的形式也不一样。
- 3) 弹脆塑性材料圆板在整个板全部进入塑性时的残余承载能力与理想塑性条件下的承载能力存在式(41)所示的关系。
- 4) 结构在逐渐进入塑性的过程中,应力空间中的屈服面发生非对称的收缩,后继屈服面形状与加载路径有关,而不是通常认为的简单沿初始屈服面的法向收缩。

参 考 文 献

- [1] Dems K, Mróz Z. Stability Condition for brittle plastic structure with propagation damage surface. J Struct Mech. 1985, Vol. 13(1), 85-122.
- [2] 刘文政,徐秉业. 脆塑性结构稳定问题的提法与梁的纯弯曲计算. 清华大学学报, 1988, Vol. 28(5), 1-10.
- [3] 刘文政. 脆塑性结构极限载荷的计算与工程应用[博士论文]. 北京:清华大学, 1988
- [4] 徐秉业,刘信声. 结构塑性极限分析. 北京:建筑工业出版社, 1985

Elasto-Brittle-Plastic Bearing Capacity Analysis for the Clamped and Simply Supported Circular Plate Under the Action of Distributed Lateral Load

Shen Xinpu Cen Zhangzhi Xu Bingye

(Tsinghua University, Beijing, 100084)

Abstract

Circular plate is one kind of structure models which is popular in engineering. In this paper, the elasto-brittle-plastic constitutive model is used. The bending of circular plate under the action of elasto-plastic distributed lateral load is studied in detail. The analytical expressions of bearing capacity are obtained corresponding to different value ranges of the material's residual strength coefficients. The changes of the yielding surface occurred in the loading process are discussed. At the end of this paper, the relevant expression of bearing capacity for simply supported circular plate is also presented.

Key words: *circular plate, elasto-brittle-plasticity, bearing capacity.*

Nonlinear Dynamic Analysis of Elastic Linkage Mechanisms by Finite Element Method

Zhang Xianmin

(Shantou University, Shantou 515063)

Liu Jike Shen Yunwen

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract

In this paper, the generalized nonlinear equations of motion for elastic linkage mechanism systems are presented, in which the gross motion and elastic deformation coupling terms and the geometric nonlinearity effects are taken into account. The equations of motion are period and time-varying nonlinear equations. According to the characteristics, solution for this kind nonlinear vibration equations is investigated, and an efficient closed-form iterative procedure is presented. The effects of geometric nonlinearity on linkage mechanisms are studied. The results of this study are important for dynamic design of linkage mechanism systems.

Key words: *elastic, linkage mechanism, dynamic equations of motion, closed-form algorithm, geometric nonlinearity.*