第 7 卷第 2 期　　中国有色金属学报　　1997 年 6 月
Vol. 7　No. 2　　The Chinese Journal of Nonferrous Metals　　Jun. 1997

复合材料参数识别问题的计算方法①

王晓纯　沈新普*　李从珠　徐秉业*　薛明德*
(北方工业大学, 北京 100041; * 清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘　要　提出了一个复合材料性能参数识别问题的计算方法。该方法是通过运用有限元反分析理论和系统辨识技术建立起来的, 当给出复合材料结构或者试件的位移测量值后, 用所提出的迭代计算方法, 可以计算出相关的性能参数。给出了加权最小二乘法的迭代计算公式和误差估计公式。详细讨论了迭代计算中的收敛性问题, 并针对二种类型的复合材料板的性能参数进行了模拟计算, 计算结果表明, 所提出的方法对解决复合材料以及结构的性能参数识别问题是行之有效的。

关键词　参数识别　复合材料　反分析

随着工业技术的提高和加工工艺的不断发展, 可以生产的复合材料的种类也急速增加, 使用者可以从中选择他们所需要的材料。但目前应用于工程实际中的材料种类还是很有限的, 这是因为使用者常常对于新材料的性能不了解; 他们必须建立一种可以测量复合材料力学性能的方法, 包括建立数学模型和与之相应的实验方法[1]。目前, 测量复合材料力学性能的方法主要是根据材料力学理论建立的[2,3]。这些方法对测量拉伸、弯曲、剪切等力学性能参数是有效的, 但对于测量弯曲与拉伸耦合、弯扭耦合等力学参数, 传统的实验方法受到限制, 而各种力学性能的耦合效应是复合材料的一个特点。因此, 必须建立能够直接测量复合材料宏观力学性能的实验方法。

反问题是近年来计算力学与实验力学研究的重要方向之一[4]。复杂材料以及结构的力学性质、构造的内部缺陷、深层地质构造等无法直接观察和实际测量的事物, 都可以借助于反分析方法进行研究[5,6]。本文将反问题的研究方法应用到复合材料刚度系数的识别问题中, 并提出了一个通过测量试件或结构的位移来获得弯曲刚度系数和耦合刚度系数的反分析计算方法。这个方法中的基本公式是加权最小二乘法的迭代计算公式。为了使该方法具有较好的通用性, 公式中除用中间差分代替偏导数外, 没有附加其他约束条件。因此, 这个方法也可应用于其他力学参数的识别问题。

1　加权最小二乘法迭代计算公式

反分析计算需要给出一组实验测量值, 这里假定, 针对一个具体的试件或结构, 当给出材料参数之后, 能够用有限元方法进行正分析计算; 同时, 通过实验可以测量试件或结构的位移值。设 S^k 是第 k 次迭代计算时材料参数向量; u^k 是与 S^k 相对应, 用有限元方法的正分析计算出的位移向量; 设 $\overline{u}$ 是位移的测量值。为了建立材料参数 S^k 与 S^{k-1} 之间的递推关系, 将 $u(S)$ 作为材料参数的函数, 并在 u^k 邻域内按台劳级数展开, 略去高阶项后, 则有

$$u^k = u^{k-1} + \frac{\partial u^k}{\partial S^k}(S^k - S^{k-1}) \tag{1}$$

令

$$\frac{\partial u^k}{\partial S^k} = [C]^k_{m\times n} \tag{2}$$

则有

① 收稿日期: 1996-07-10; 修回日期: 1996-09-20　王晓纯, 男, 42 岁, 副教授

$$u^k = u^{k-1} + [C]^k (S^k - S^{k-1}) \tag{3}$$

式中　m 为位移测量点的个数，n 为材料参数的个数。

为加快收敛速度，使每次迭代计算产生的误差最小，采用加权最小二乘法的方法，目标函数为

$$J = (\bar{u} - u^k)^{\mathrm{T}} [W] (\bar{u} - u^k) \tag{4}$$

由目标函数的极小化条件

$$\frac{\partial J}{\partial S} = 0 \tag{5}$$

得

$$S^k = S^{k-1} + ([C]^{\mathrm{T}} [W] [C])^{-1} \times [C]^{\mathrm{T}} [W] (\bar{u} - u^{k-1}) \tag{6}$$

式中　$[W]$ 为加权系数矩阵，且

$$[W] = \mathrm{diag}[1/\sigma_j^2] \tag{7}$$

式中　σ_j^2 是每次迭代计算时，第 j 个位移测量点误差的均方差

$$\sigma_j^2 = [e_j - \sum_{i=1}^{m} e_i / m]^2 \tag{8}$$

$$e_j = \bar{u}_j - u_j^k \tag{9}$$

由式(9) 可知，计算加权系数矩阵 $[W]$ 时，并不需要引入新的变量。另外，如令 $\sigma_j^2 = 1$，则 $[W]$ 将退化成单位矩阵，方程(6) 将退化成一般的最小二乘法迭代公式。

由方程(2) 可知，系数矩阵 $[C]$ 的物理意义为当材料参数变化时位移值变化量[7]。由于无法建立位移与材料参数的解析关系，需要利用数值计算的方法求解 $[C]$。这里我们用中间差分代替偏导数来计算 $[C]$ 中的系数 C_{ij}。即

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial S_j} = \frac{\Delta u_i (\delta S_j)}{2 \delta S_j} \tag{10}$$

式中　δS_j 表示材料参数在 S_j 附近的一个微小变化，$\delta S_j = \beta_j S_j$，与之相应的位移变化量为

$$\Delta u_i (\delta S_j) = u_i (S_j + \delta S_j) - u_i (S_j - \delta S_j) \tag{11}$$

当给出差分步长 β_j 后，可以通过有限元正分析计算出 C_{ij}，每次迭代过程中形成系数矩阵 $[C]$ 需要 $2 \times n$ 次有限元正分析计算。

方程(6) 就是由加权最小二乘法得到的反分析迭代计算公式。当给出材料参数的初值 S^0 和位移测量值 $\bar{u}$ 之后，利用方程(6) 进行有限次迭代计算，可以得到材料参数的近似值。

在数值逼近理论中，作为逼近微商的算法，有向前差分、向后差分、中间差分等形式。从理论上讲，中间差分的精度要比向前和向后差分高一阶。但实际上对差分精度影响比较大的因素是差分系数 β 的选择，因为在具体的数值计算中，差分系数 β 过大或过小，都会导致反演计算不能收敛到材料真值。为考察差分系数对收敛性的影响，这里我们选择对位移不敏感的材料参数 d_{12} 作为反演参数，采用图 1 的悬臂梁模型。取挠度比较大的 6 个位移测量值。图 2 是不同差分系数下反演 d_{12} 时的收敛情况。从中可以看出，差分系数 β 从 0.0001 至 3.0 的区域，反演计算都能收敛到材料真值。由于收敛区域宽，β 的选择是比较容易的。

2　误差估计公式

数值计算中的误差分析是个很重要且复杂的问题，这里所涉及的误差来自两个方面。一是用中间差分代替偏导数以及计算中的舍入误

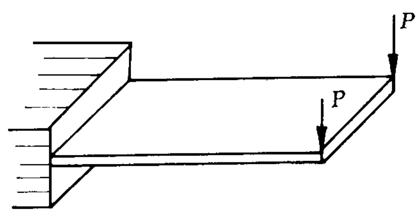

图 1　悬臂梁计算模型

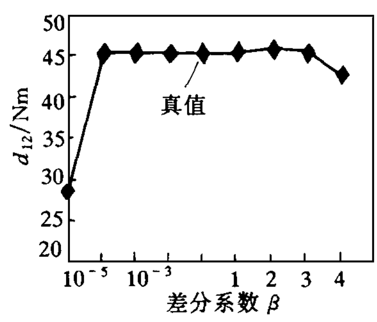

图 2　差分系数对收敛性的影响

差, 二是测量信息不准确导致的误差。对于前者数学上已有估计和分析, 下面主要分析位移测量值的误差对材料参数的影响, 将方程(6)改成下面的形式:

$$S^k = S^{k-1} + [G]^k(\bar{u} - u^{k-1}) \tag{12}$$

式中

$$[G]^k = ([C][W][C])^{-1}[C]^{\mathrm{T}}[W] \tag{13}$$

当已知位移测量值 $\bar{u}$ 有一噪声 ε, 即 $\bar{u}$ 变成 $\bar{u} + \varepsilon$ 时, 则

$$S^k = S^{k-1} + [G](\bar{u} + \varepsilon - u_{\varepsilon}^{k-1}) \tag{14}$$

当 $k = 1, 2$ 时, 材料参数的误差为

$$\Delta S^1 = S_{\varepsilon}^1 - S^1 = [G]^1\varepsilon \tag{15}$$

$$\Delta S^2 = [[I] + [I] - [G]^2[C]^1][G]^2\varepsilon \tag{16}$$

由归纳法则有

$$\Delta S^k = [[I] + ([I] + [G]^k[C]^{k-1}) + ([I] - [G]^k[C]^{k-2}) \times ([I] - [G]^k[C]^{k-1}) + \cdots + \prod_{i=1}^{k-1}([I] - [G]^k[C]^i)][G]^k\varepsilon \tag{17}$$

令

$$[Q] = [[I] + ([I] - [G]^k[C]^{k-1})] + \cdots + \prod_{i=1}^{k-1}([I] - [G]^k[C]^i)][G]^k \tag{18}$$

则

$$\Delta S^k = [Q]\varepsilon \tag{19}$$

而

$$\|\Delta S^k\|_2 = (\Delta S^k(\Delta S^k) = \varepsilon^{\mathrm{T}}[Q]^{\mathrm{T}}[Q]\varepsilon \tag{20}$$

令

$$[E] = [Q]^{\mathrm{T}}[Q] \tag{21}$$

$[E]$ 是对称矩阵, 其阶数与 ε 相同, 设矩阵 $[E]$ 的最大特征根为 $\mathrm{ch}_{\max}([E])$, 则有下面的不等式[8]。

$$\varepsilon^{\mathrm{T}}[E]\varepsilon / \varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon \le \mathrm{ch}_{\max}([E]) \tag{22}$$

因此

$$\|\Delta S^k\|_2 = \varepsilon^{\mathrm{T}}[E]\varepsilon \le \varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon\,\mathrm{ch}_{\max}([E]) = \|\varepsilon\|_2\mathrm{ch}_{\max}([E]) \tag{23}$$

上式即为位移测量噪声对材料参数计算值影响的表达式。若给出位移测量误差的 $\|\varepsilon\|_2$, 则可利用方程(23) 估计材料参数的误差。

在具体的实验中, 测量误差 ε 的随机性很大, 但一般情况下, 测量误差 ε 总是围绕真值做上下跳动。下面针对这一情况进行模拟误差分析。

设位移测量值 $\bar{u}_i$ 的近似值为 $\bar{u}_i^*$, 测量误差为 ε_i, 则有

$$\bar{u}_i^* = \bar{u}_i(1 + \varepsilon) \tag{24}$$

作为模拟条件, 设测量误差的代数和近似为零, 即

$$\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i \approx 0 \tag{25}$$

仍采用图1的计算模型和条件, 由图3表示当 $|\varepsilon_i| = 1\%, 2\%, 3\%$ 时的反演计算收敛情况。可见, 三种情况都是收敛的, 当 $|\varepsilon_i| = 1\%$ 时, 测量误差对反演精度基本上没影响; 当 $|\varepsilon_i| = 2\%$ 时, 对反演参数精度影响为 1.2%; 当 $|\varepsilon_i| = 3\%$ 时对精度的影响为 8% 左右。

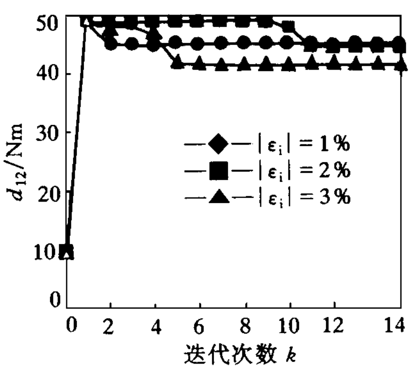

图 3　测量误差对收敛精度的影响

3　数值计算格式

由上面给出的计算公式, 复合材料参数识别问题的计算格式如下:

(1) 确定一个反分析计算模型(或者实验模型);

(2) 输入位移测量值 $\overline{u}$;

(3) 给出材料参数的初值 S^0;

(4) 给出差分步长 β_i;

(5) 用有限元正分析计算 u^0;

(6) 给 S^0 的各个分量一个小的变化 δS_j 并按方程(10) 计算 S^0 处的系数矩阵 $[C]$;

(7) 将 S^0 无量纲化;

(8) 按方程(6) 求材料参数的近似值 S^1;

(9) 检查收敛性

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\| S^1 - S^0 \|_2}{\| S^1 \|_2} \leq \alpha_1 \\ \text{并} \dfrac{J^1}{J^0} \leq \alpha_2, \; J^0 = \| \overline{u} \|_2 \end{array}\right\} \quad 1$$

表 1　规则非对称正交铺设层合板的计算结果 (B/ N ; D_{ij}/ Nm)

系数	初值	迭代计算次数 k							真值 S_j	$\left\|\frac{S_i^{12}-S_i}{S_i}\right\|$
		2	4	6	8	10	12	14		
B_{11}	4.0×10^4	4.0×10^4	4.3×10^4	4.5×10^4	4.6×10^4	4.6×10^4	4.6×10^4	4.6×10^4	4.6×10^4	2 %
D_{11}	200.0	374.7	426.9	427.7	428.1	428.3	428.3	428.5	437.1	1.9 %
D_{12}	20.0	35.5	38.2	38.7	39.1	39.2	39.2	39.2	40.1	2.2 %
D_{66}	40.0	72.0	75.4	74.8	74.7	74.6	74.6	74.6	76.0	1.8 %

表 2　反对称铺设层合板的计算结果 (B_{ij}/ N ; D_{ij}/ Nm)

系数	初值	迭代计算次数 k							真值 S_j	$\left\|\frac{S_i^{12}-S_i}{S_i}\right\|$
		2	4	6	8	10	12	14		
B_{16}	-9.8×10^3	-4.4×10^4	-2.7×10^4	-2.6×10^4	-2.8×10^4	-2.6×10^4	-2.7×10^4	-2.6×10^4	-2.7×10^4	3.7 %
B_{26}	-9.8×10^3	-4.9×10^4	-2.3×10^4	-2.0×10^4	-1.9×10^4	-2.0×10^4	-1.9×10^4	-2.1×10^4	-2.0×10^4	5.0 %
D_{11}	147.1	328.2	371.0	371.4	372.3	371.2	371.8	371.4	367.4	1.0 %
D_{12}	78.4	184.3	156.6	156.1	156.1	156.2	156.1	156.6	158.9	1.5 %
D_{22}	78.4	265.1	265.1	264.2	263.3	264.4	263.9	264.6	269.2	1.8 %
D_{66}	78.4	209.0	191.4	191.1	191.3	191.1	19.1	191.3	194.8	1.8 %

他系数的精度比较高。

5　结束语

本文提出了一个完整的材料参数识别问题的反分析迭代计算方法。给出了具体的计算格式和误差估计公式。为了克服由于位移与材料参数之间的复杂性, 文中提出用中间差分代替偏导数的方法计算有关系数, 除此之外, 没有附加其它对问题性质的限制。因此, 该方法对解决材料参数识别问题具有较好的通用性。

为了充分验证计算方法的可行性和有效性, 本文选择了各种参数性质比较复杂的复合材料层合板的参数识别问题为具体算例。识别的材料参数中含有用一般材料力学实验方法很难测试的耦合刚度系数。计算结果表明, 本文提出的材料参数识别问题的反分析计算方法, 收敛速度快, 精度高, 通用性强。另外, 由于该方法只需测量少量的位移值, 即可进行计算, 实验简便易行。该方法的建立为直接测量某些材料的宏观力学性能参数提供了一个非常有价值的途径。

参考文献

1　周　履, 范赋群. 复合材料力学. 北京: 高等教育出版社, 1991.

2　张国梁. 复合材料静载性能试验方法. 北京: 航空工业出版社, 1988.

3　张双寅等. 复合材料结构的力学性能. 北京: 北京理工大学出版社, 1992.

4　Shiro KUBO. J Soc Mat Sci Japan, 1992, 41(70): 1595.

5　Courage W M G. Schreurs P J G, Janssen J D. Computers & Structures, 1990, 34(2): 231.

6　Stephen R, Kennon Georges Dulikravich. Inter Jour Numer Methods in Engrg, 1986, 22: 363.

7　沈新普, 岑章志, 徐秉业. 岩土工程学报, 1995, 17(3): 66.

8　Srivastava M S, Carter E M. An Introduction to Applied Multivariate Statistics. Oxford: Elsevier Science Publishing, 1983.

9　Wang Xiaochun, Masuda Yuichro. TOKYO University Centre NEWS, 1986, 18: 134.

STUDY OF SOLUTION TO IDENTIFICATION OF MECHANICAL PARAMETER OF COMPOSITE

Wang Xiaochun, Shen Xinpu *, Li Congzhu, Xu Bingye *, Xue Mingde *

North China University of Technology, Beijing 100041

* *Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084*

ABSTRACT An inverse mehtod is proposed for the identification of the mechanical parameter values of composite. This method is established on the basis of finite element method and inverse analysis theory and system identification technique. When the measured values of displacement of the structure or specimens of the composite are given, with the aid of the iterative scheme proposed, mechanical parameter values can be obtained. The weighted least square iteration computational equations and error estimate equations are given. The convergence states expressed by the iterative computations are discussed in detail, and inverse computation is carried out for two types of anisotropic layered composite plates. The results show that the solution to various mechanical parameters of composite and structure is practical and effective.

Key words parameter identification composite materials inverse method

(编辑 彭超群)